Systèmes à événements discrets
Réseau de Petri

Abdelouahed TAJER
mail : a.tajer@uca.ac.ma

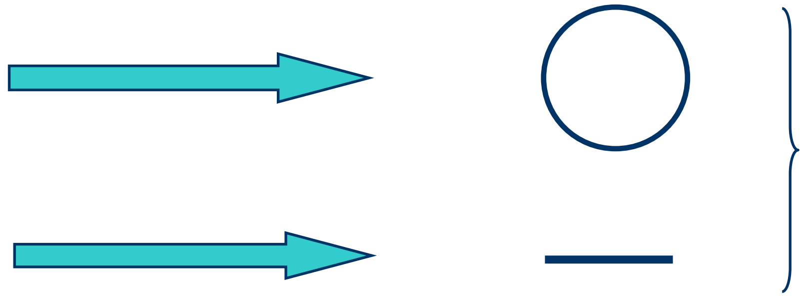
- Thèse de Carl Adam Petri en 1962
- Le formalisme des réseaux de Petri est un outil permettant l'étude de systèmes dynamiques et discrets.
- Il s'agit d'une représentation mathématique permettant la modélisation d'un système.
- L'analyse d'un réseau de Petri peut révéler des caractéristiques importantes du système concernant sa structure et son comportement dynamique.
- Les résultats de cette analyse sont utilisés pour évaluer le système et en permettre la modification et/ou l'amélioration le cas échéant.

Notions de base

Un Réseau de Petri (RdP) est un graphe orienté comprenant deux types de sommets:

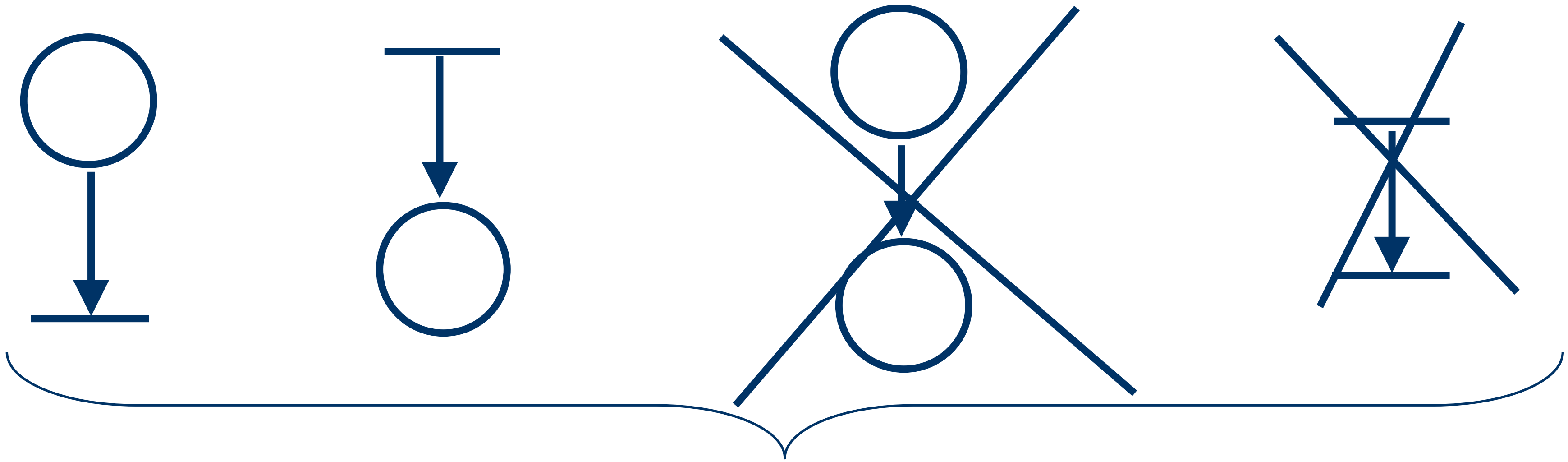
Les places

Les transitions



Nombre fini et non nul

Les places est les transitions sont reliés par des arcs orientés

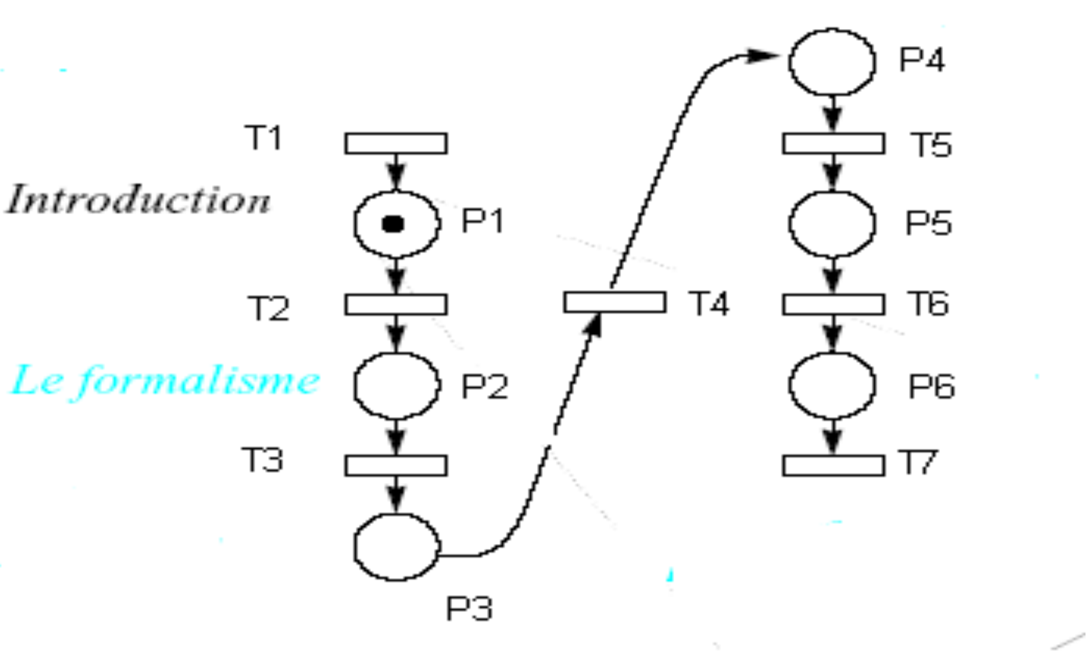


Un Rdp est un graphe biparti

Marquage

On appelle marquage M d’un RdP le vecteur du nombre de marques dans chaque place : la i ième composante correspond au nombre de marque dans la i ième place

Le marquage à un certain instant définit l’état du système décrit par le RdP



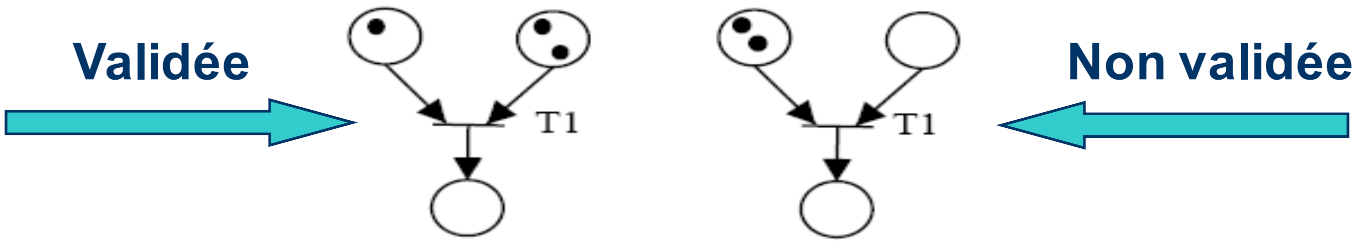
Évolution d’état

Évolution du marquage

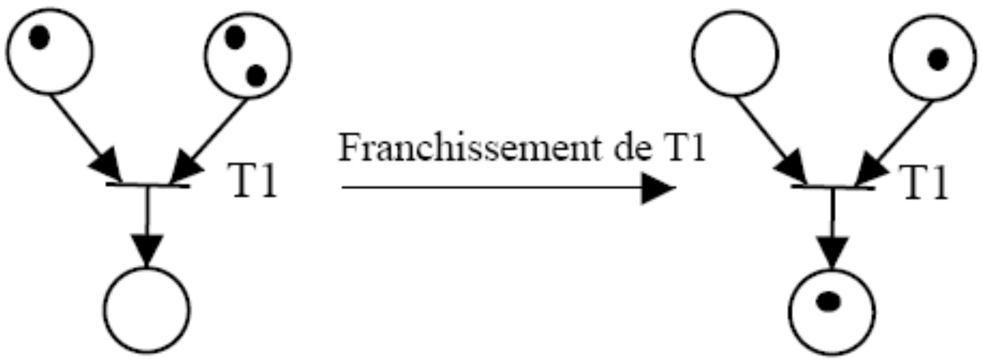
Fig. RdP marqué M=(1,0,0,0,0,0)

Franchissement de transition

Transition validée : une transition est dite **validée** si toutes les places en amont (i.e., en entrée) de celle-ci possèdent au moins une marque.



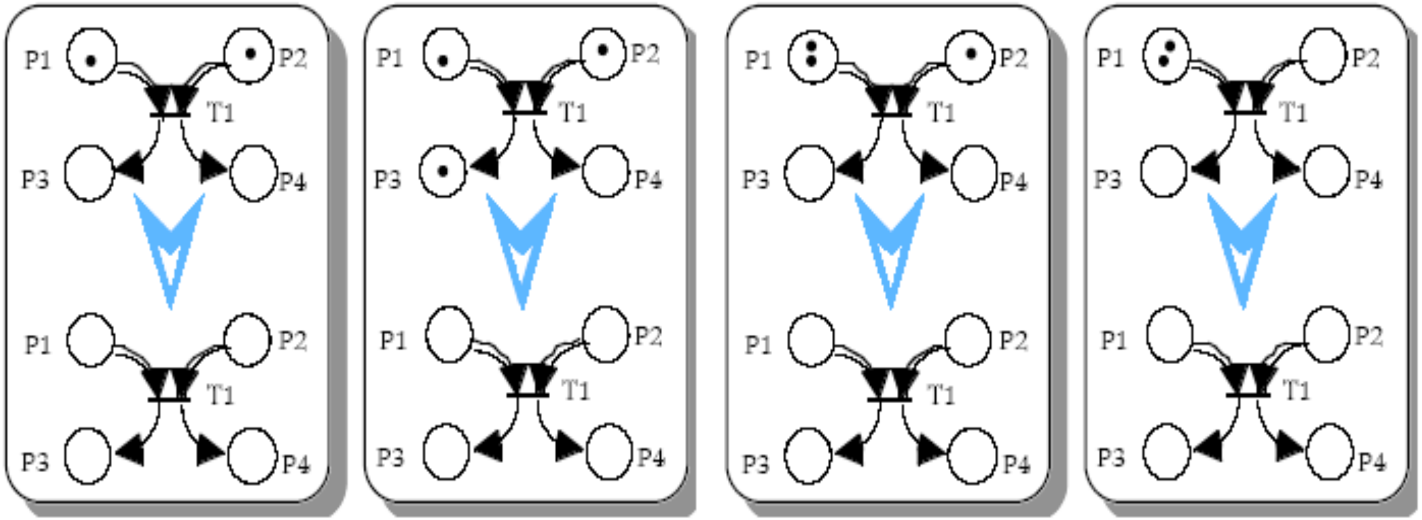
Franchissement (tir) : si la transition est validée, on peut effectuer le franchissement de cette transition. Le franchissement consiste à :
- retirer une marque dans chacune des places en entrée de la transition
- ajouter une marque à chacune des places en sortie



Franchissement de transition

Exemple

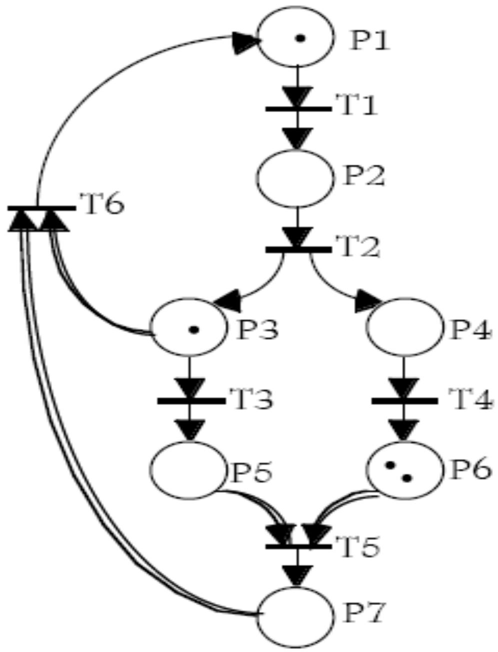
Pour les quatre situations ci-dessous, compléter le marquage du réseau après franchissement de T1 s'il est possible.



Franchissement de transition

Transition est validée Elle sera immédiatement franchie

L'évolution du RdP se fait par le franchissement d'une seule transition à la fois



Quand plusieurs transitions sont simultanément franchissables, on ne peut pas savoir dans quel ordre elles seront effectivement franchies

Notion de RdP autonome et non autonome

Un RdP autonome décrit le fonctionnement d'un système de façon autonome, c'est-à-dire dont l'évolution est régi par ses propres lois (les instants de franchissement ne sont pas connus ou pas indiqués)

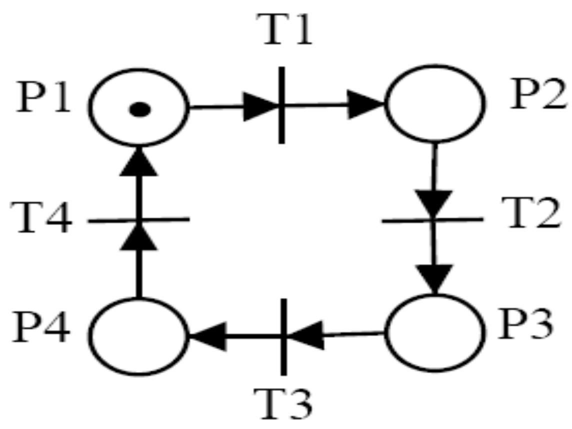


Fig. Rdp autonome (les quatre saisons)

Notion de RdP autonome et non autonome

Un RdP non autonome décrit le fonctionnement d'un système dont l'évolution est conditionnée par des événements externes ou par le temps

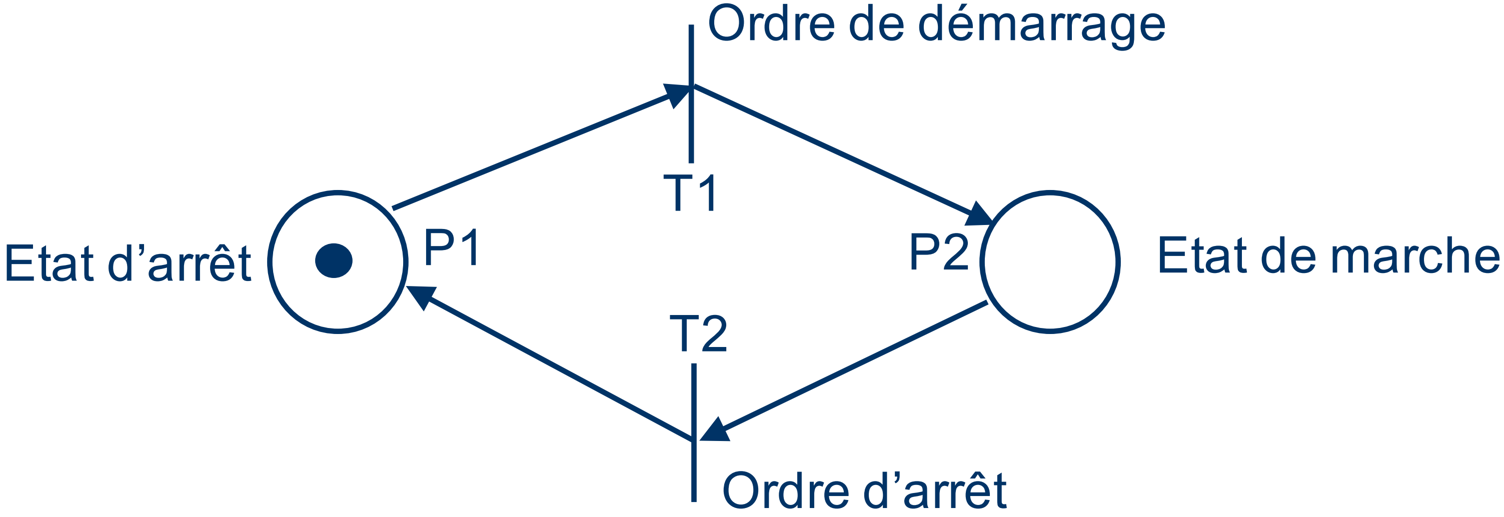
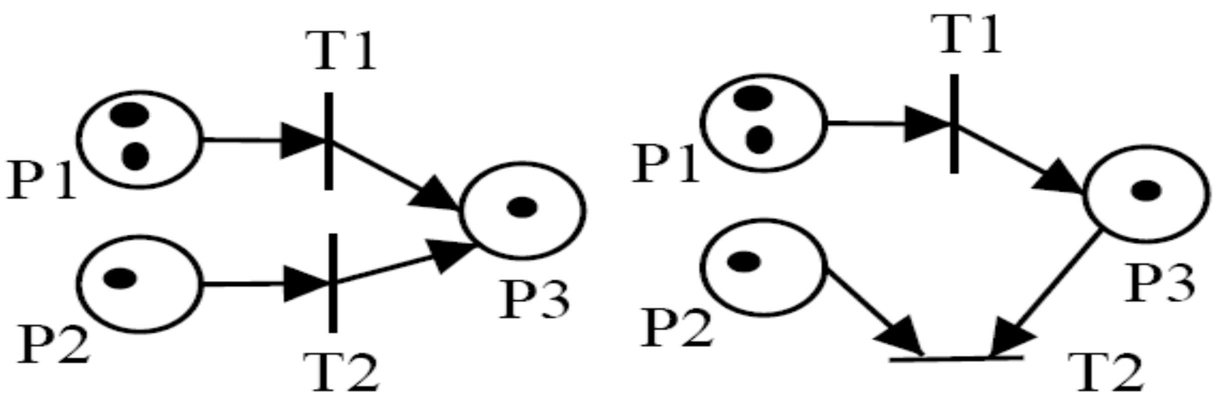


Fig. RdP non autonome

Exemples de RdP

L'état du système est caractérisé par :

- Le nombre n_1 à l'instant initial (nombre de marques dans la place P_1)
- Le nombre n_2 à l'instant initial (nombre de marques dans la place P_2)
- La résultat de l'opération à l'instant final (nombre de marques dans la place P_3)



Opération sur deux entiers naturels

RdP avec une structure particulière

Graphe d'états : un RdP est un graphe d'état si et seulement si toute transition a exactement une place d'entrée et une place de sortie

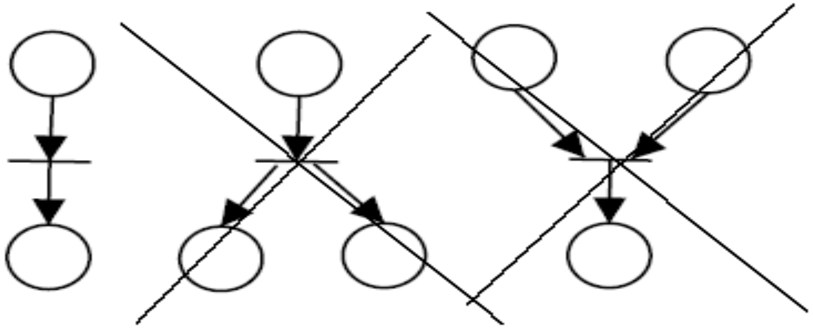


Fig. graphe d'états non marqué ou pas

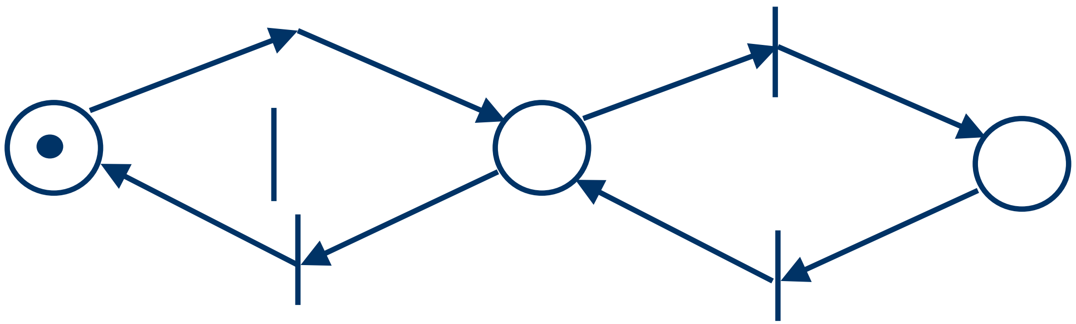


Fig. graphe d'états marqué

RdP avec une structure particulière

Graphe d'événements : un RdP est un graphe d'événements si et seulement si <u>toute place a exactement une transition d'entrée et une transition de sortie</u>

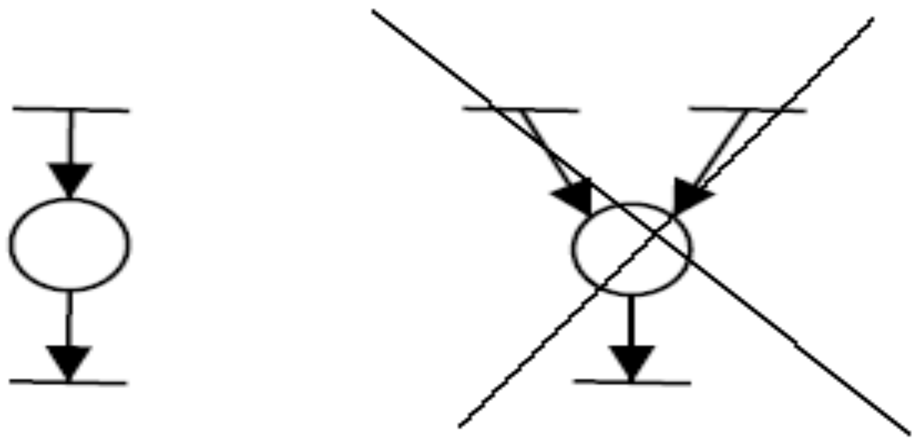
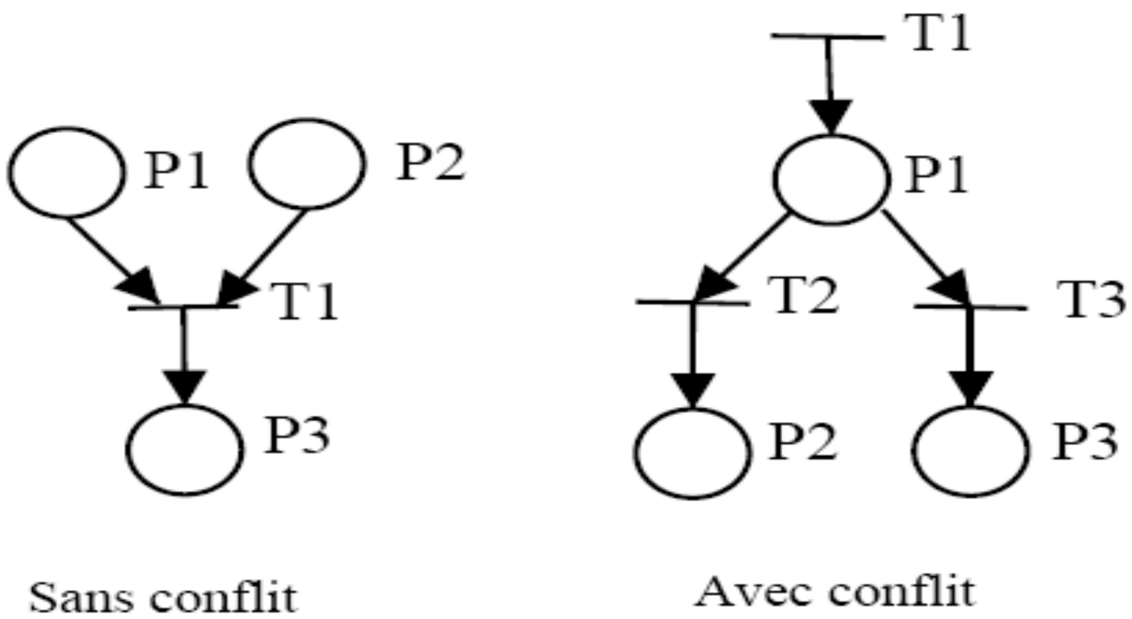


Fig. graphe d'événements ou pas

RdP avec une structure particulière

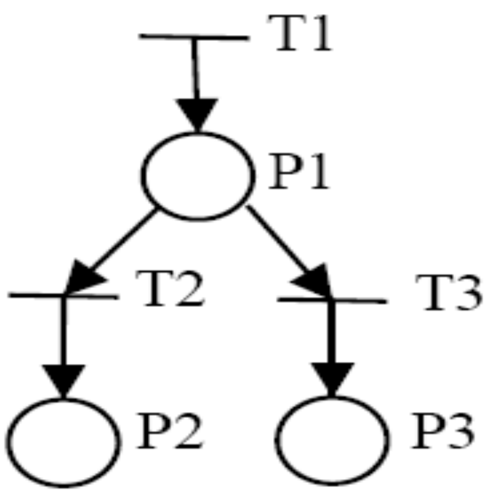
RdP sans conflit : un RdP est dit sans conflit (ou conflit structurel) si et seulement si toute place a au plus une transition de sortie

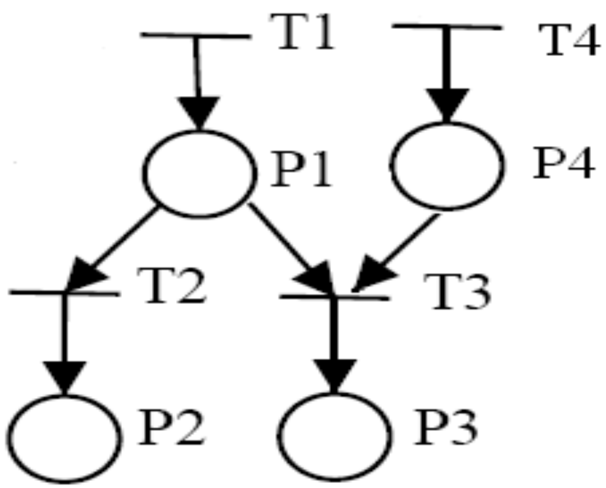


Conflit ou pas

RdP avec une structure particulière

RdP à choix libre : un RdP est dit à choix libre si et seulement si les transitions de sortie de tous ses conflits n'admettent qu'une seule place d'entrée.





Choix libre ou pas

RdP avec une structure particulière

RdP à choix libre étendu : un RdP est dit à choix libre étendu si et seulement si les transitions de sortie de celui-ci admettent les mêmes places d'entrée

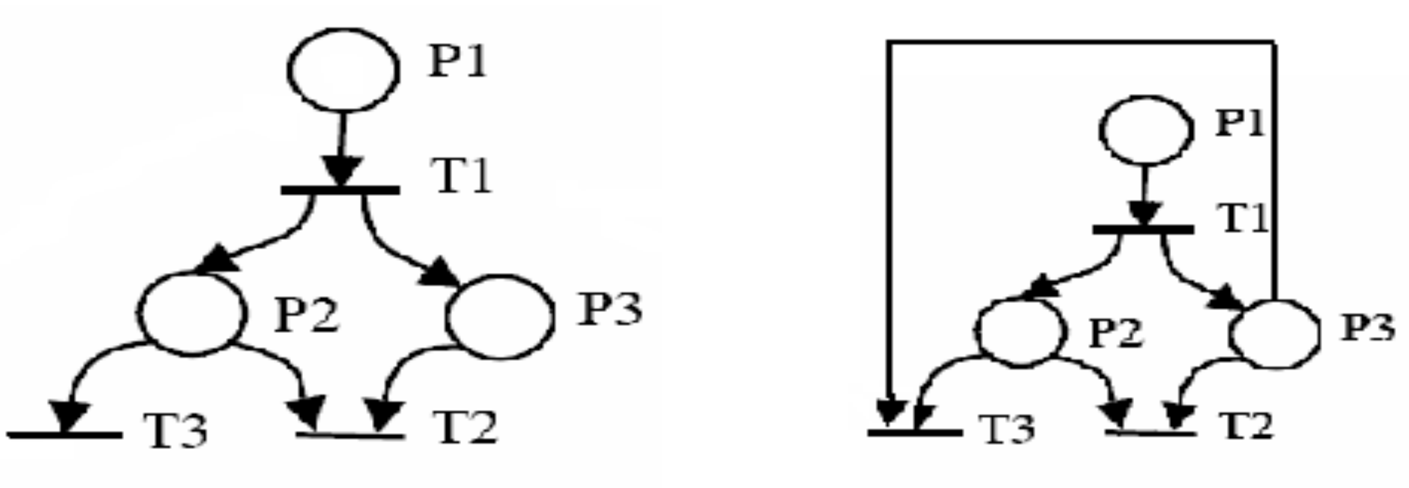
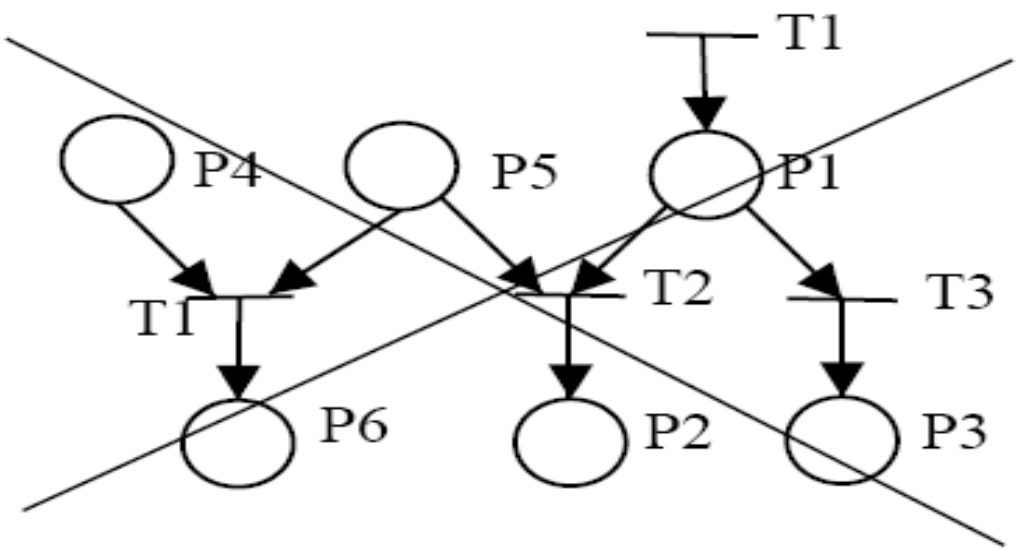


Fig. choix libre étendu ou pas

RdP avec une structure particulière

Rdp Simple : un RdP est dit simple si et seulement si toutes ses transitions n'interviennent que dans un seul conflit au maximum



RdP qui n'est pas simple

RdP avec une structure particulière

RdP pur : un RdP est dit pur si et seulement s'il n'existe pas de transition ayant une place d'entrée qui soit aussi place de sortie de cette transition.

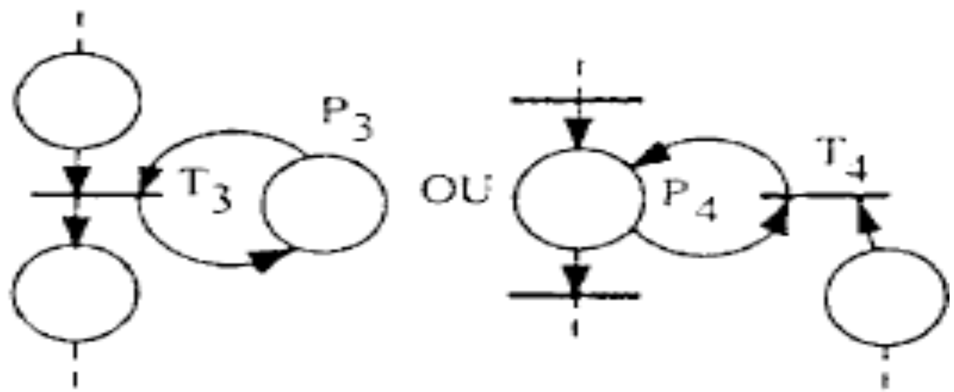


Fig. RdP impur

RdP avec une structure particulière

Propriété : Tout RdP impur peut être transformé en un RdP pur

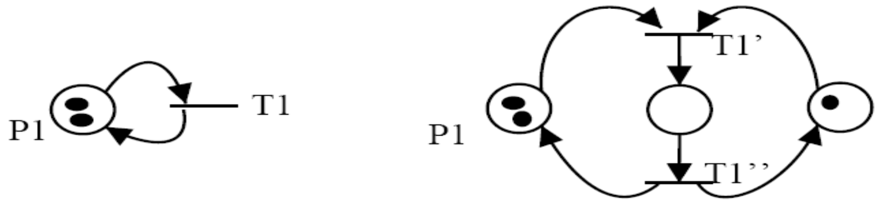
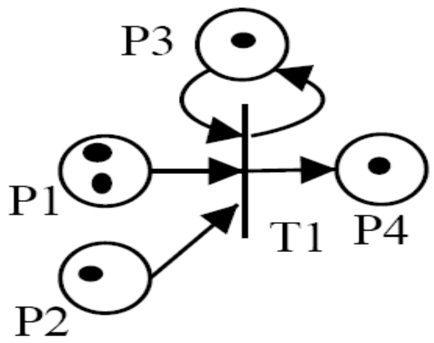


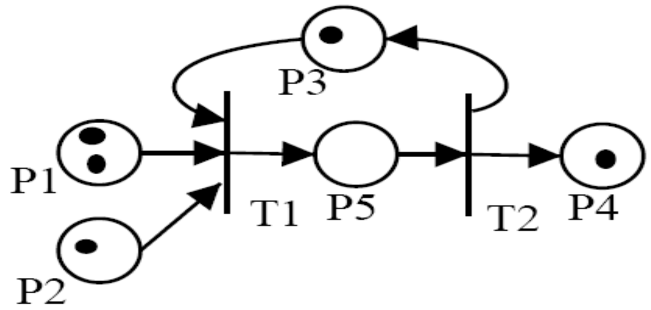
Fig. Transformation d'un réseau impur en un réseau pur

Exemple : RdP d'une réaction chimique

$$H_2 + C_2H_4 \xrightarrow{platine} C_2H_6$$



Rdp impur de la réaction



Rdp pur de la réaction

Propriétés des RdP

Notations :

Le franchissement de T_1 à partir du marquage $M_0 = (1,0,0,0,0) = [1\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$, conduit au marquage $M_1 = [0\ 1\ 1\ 0\ 0]^T$, on notera ceci : $M_0\ [T_1 > M_1$

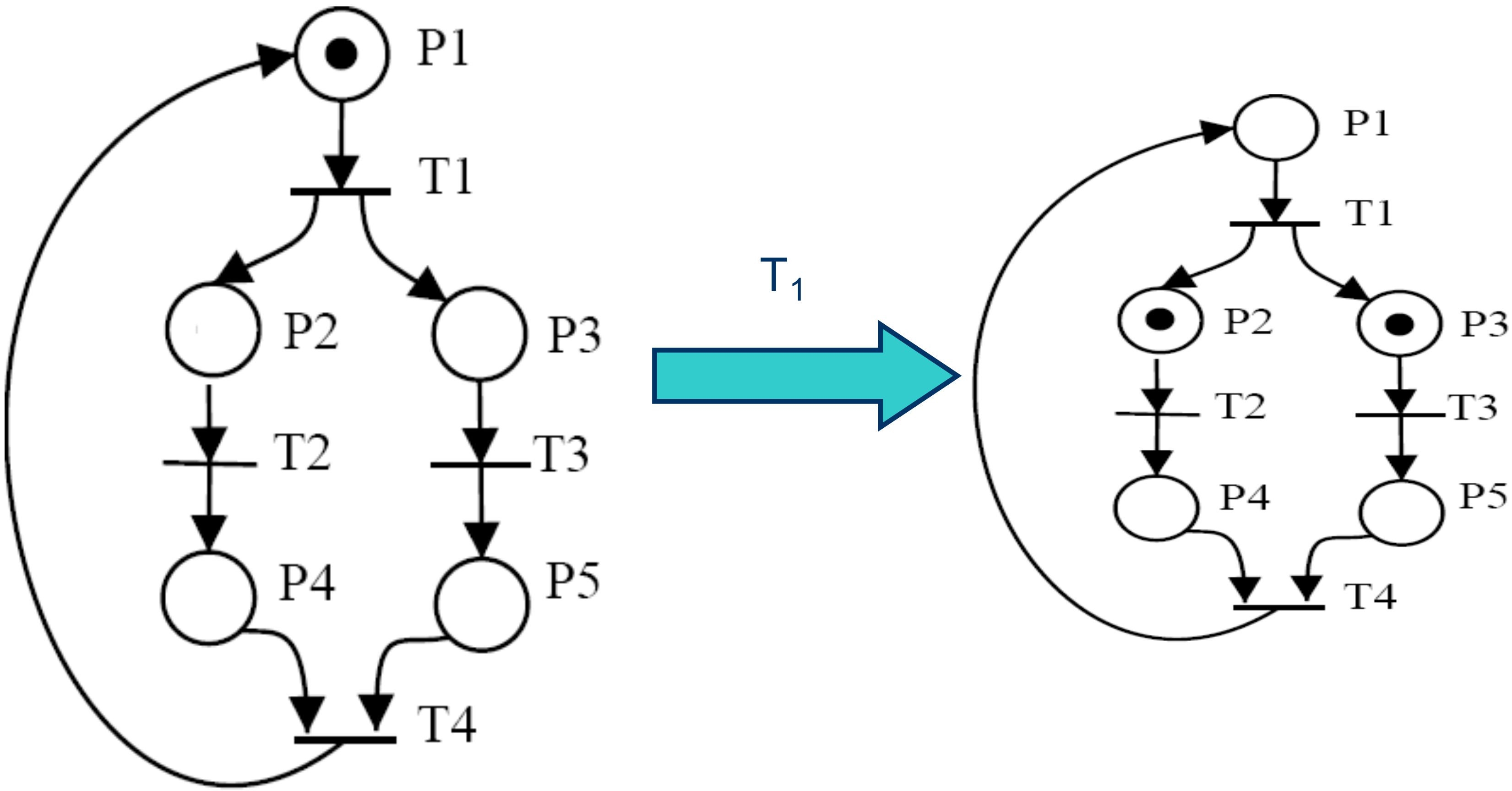
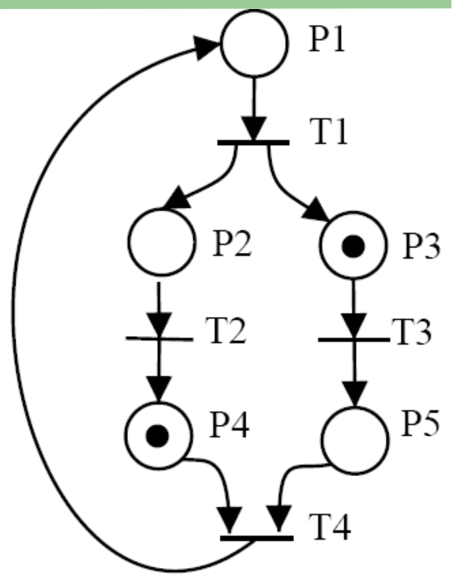
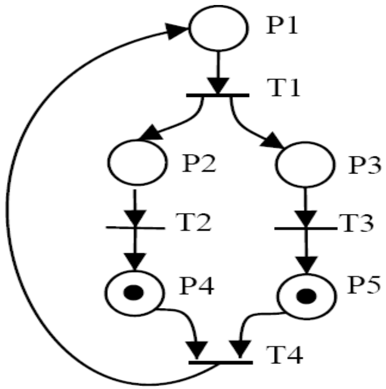


Fig. marquages accessibles d'un RdP



$M_1[T_2>M_2=[0\ 0\ 1\ 10]^T$

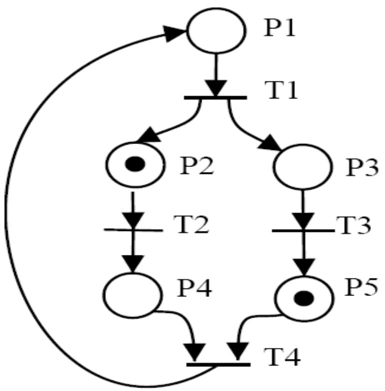
T_2



T_4

M_0

T_3



$M_2[T_3>M_4=[0\ 0\ 0\ 1\ 1]^T$

$M_3[T_2>M_4=[0\ 0\ 0\ 1\ 1]^T$

$M_1[T_3>M_3=[0\ 1\ 0\ 0\ 1]^T$

Fig. Marquages accessibles d'un RdP

Propriétés des RdP

On note : $*M_0 = \{M_0, M_1, M_2, M_3, M_4\}$ l'ensemble des marquages accessibles à partir de M_0

Séquence de franchissements : elle est définie à partir d'un marquage donné. C'est une suite de transitions qui sont franchissables successivement.

Exp. $S=T_1T_2$ et $M_0\ [S>M_2$

franchissement de la transition T_1 ou de la transition T_2	$T_1 + T_2 = T_2 + T_1$
franchissement de la transition T_1 puis de la transition T_2	$T_1T_2 \neq T_2T_1$
franchissement de la transition T_1 puis de la transition T_1	$T_1^2 = T_1T_1$
séquence de longueur 2	T_1T_2
séquence de longueur nulle	λ
répétition du franchissement de T_1 un nombre quelconque de fois	$T_1^* = (\lambda + T_1 + T_1^2 + \ldots)$

Notation des séquences de franchissements

Propriétés des RdP

Couverture : un marquage M_k couvre un marquage M_l si le marquage de chaque place P_i dans M_k est supérieur ou égale à son marquage dans M_l

$$M_k \geq M_l \Leftrightarrow M_k(P_i) \geq M_l(P_i), \forall P_i \in P$$

On dit qu'un marquage M_k est supérieur à un marquage M_l (ou **couvre strictement** M_l) si M_k couvre M_l , avec au moins une place P_i telle que $M_k(P_i)>M_l(P_i)$

$$M_k > M_l \Leftrightarrow M_k \geq M_l \text{ et } \exists \mathrm{P_i} \in P, M_k(P_i) > M_l(P_i)$$

Propriétés des RdP

Rdp borné, RdP sauf

• Une place P_i est bornée pour un marquage initial M_0 si pour tout marquage accessible à partir de M_0 le nombre de marque dans P_i reste borné.

• Elle est dite k-bornée si le nombre de marque dans P_i est toujours inférieur ou égale à k.

• Un RdP est borné pour un marquage initial M_0 si toutes les places sont bornées pour M_0. Il est k-borné si elles sont k-bornées.

• Un RdP marqué est sauf ou binaire pour un marquage initial M_0 s'il est 1-borné.

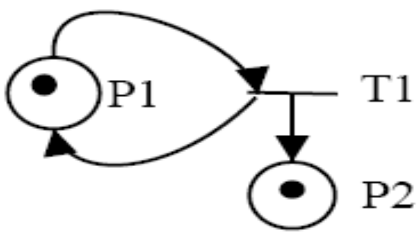


Fig. Rdp non borné

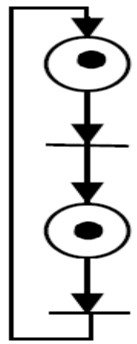


Fig. Rdp borné

Vivacité

Une **transition** T_j est **vivante pour un marquage** initial M_0 si pour tout marquage accessible $M_i \in {}^*M_0$ il existe une séquence de franchissement à partir de M_i contenant T_j

Un RdP est **vivant** pour un marquage initial M_0 si toutes ses transitions sont vivantes pour M_0

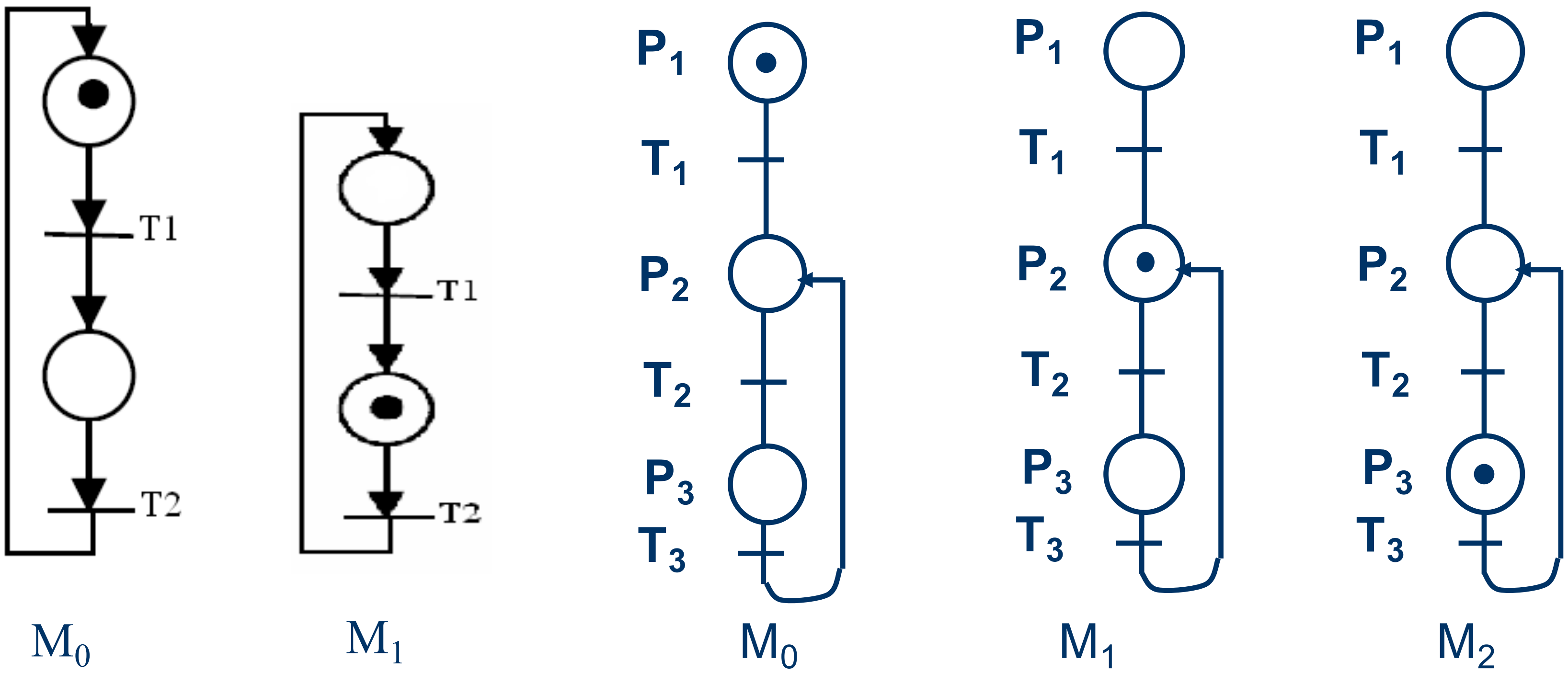


Fig. illustration de la vivacité

Propriétés des RdP

Blocage

• Un blocage (ou **état puis**) est un marquage pour lequel aucune transition est validée.

• Un RdP est dit sans blocage pour un marquage initial M_0 si aucun marquage accessible n'est un blocage.

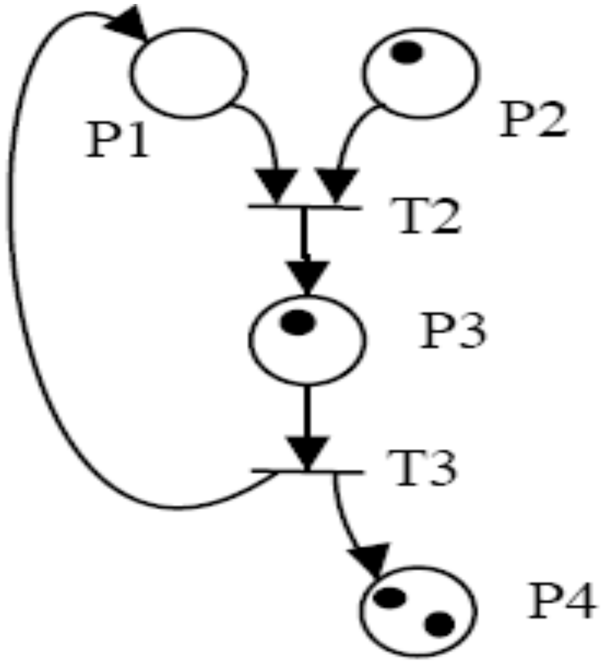
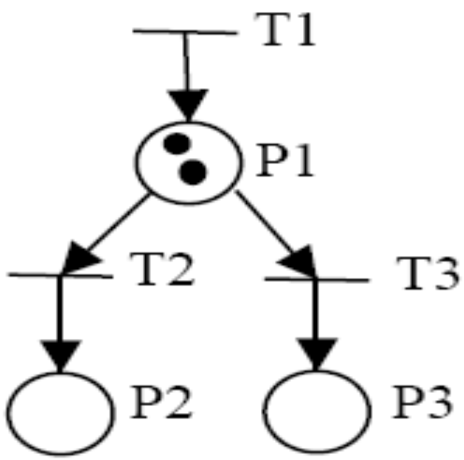


Fig. RdP avec blocage

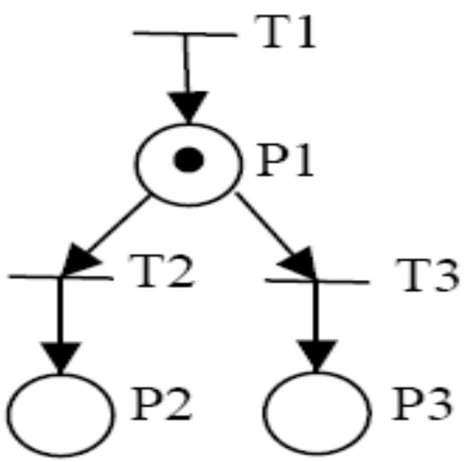
Propriétés des RdP

Conflit effectif

Un conflit effectif est l'existence d'un conflit structurel $<P_i,\{T_j,T_k, \ldots\}>$ et d'un marquage M tel que le nombre de marques dans P_i est inférieur au nombre de transitions de sortie de P_i



Sans conflit effectif



Avec conflit effectif

Propriétés des RdP

Définition

Soit un RdP **R**, et **P** l'ensemble de ses places. On a un **invariant de marquage** s'il existe un ensemble $P' = \{P_1, P_2, \ldots, P_r\} \subseteq P$ et un vecteur de pondération $(q_1, q_2, \ldots, q_r)$, tels que :

$$\mathbf{q_1 M(P_1) + q_2 M(P_2) + \ldots q_r M(P_r) = Constante\ ,\ pour\ tout\ M \in {}^*M_0}$$

P' est appelé **composante conservative**,

Un RdP est **conservatif si et seulement si P'=P**

Propriétés des RdP

Invariants

Composante conservative

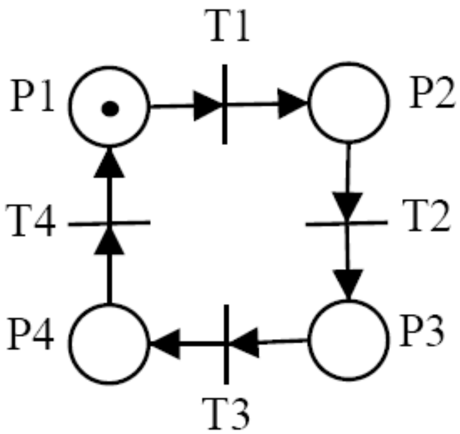
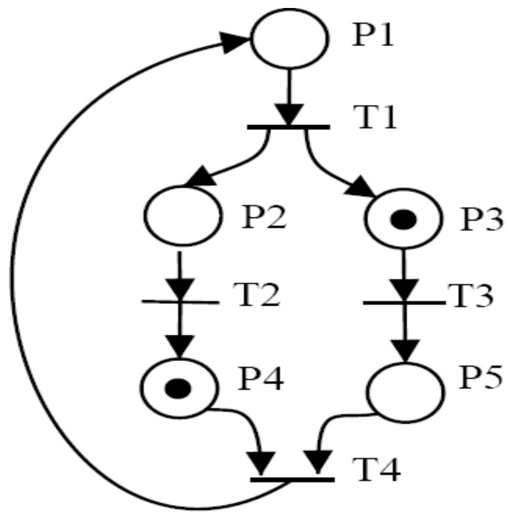


Fig. cycle des saisons



$m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 1$

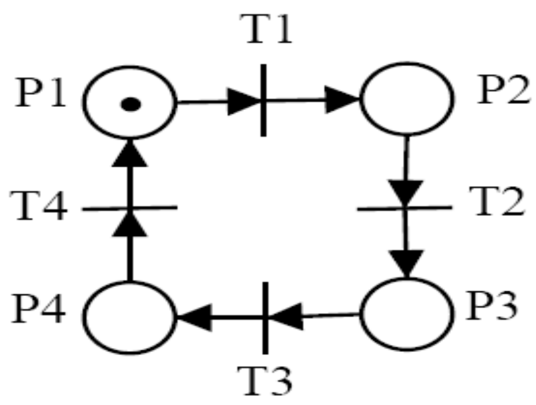
À tout instant une seule saison

$m_1 + m_2 + m_4 = 1$

$m_1 + m_3 + m_5 = 1$

$2m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 = 2$

Composante répétitive



$M_0\ [T_1T_2T_3T_4>M_0$

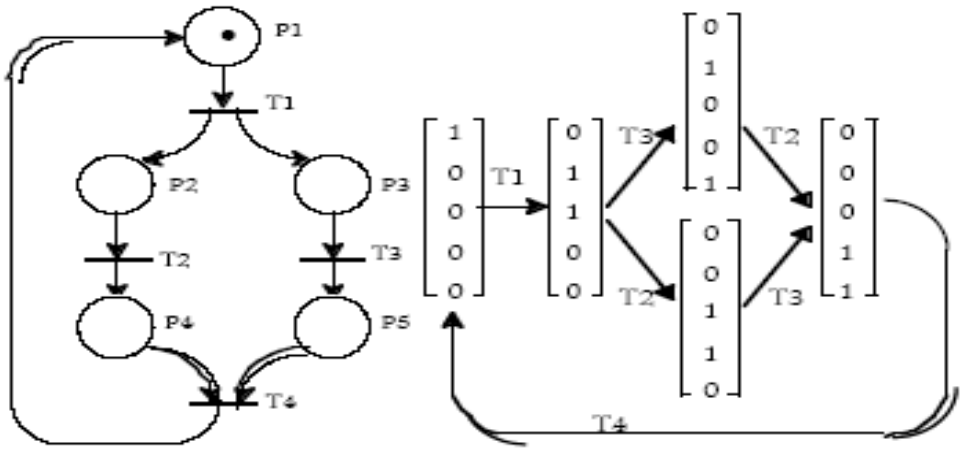
On appelle séquence **répétitive stationnaire**, une séquence de franchissement S telle que : $\mathbf{M_0[S>M_0}$

Elle est dite **complète** si elle contient toutes les transitions

Graphe des marquage et de couverture

Graphe des marquages

Le graphe de marquages accessibles est un graphe dont chaque sommet correspond à un marquage accessible et dont chaque arc correspond au franchissement d'une transition permettant de passer d'un marquage à l'autre



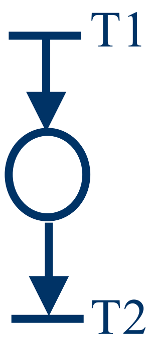
Le RdP est borné, sauf, vivant, réinitialisable

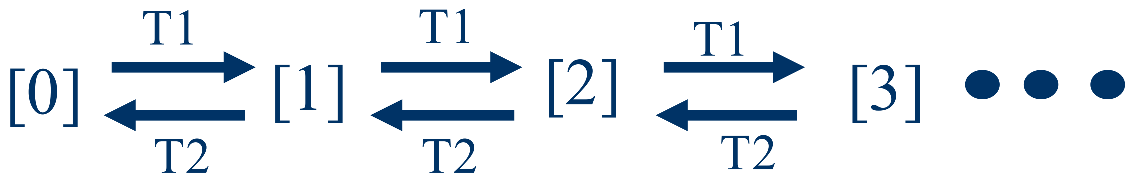
$T_1T_3T_2T_4$ et $T_1T_2T_3T_4$ sont des séquences répétitives

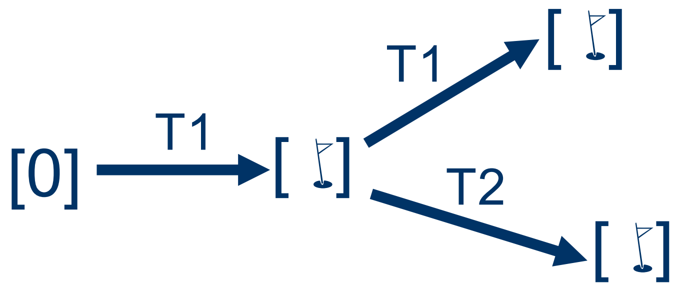
Graphe des marquages et arborescence de couverture

Arborescence et graphe de couverture

Une arborescence est un graphe particulier composé d'arcs orientés qui divergent à partir d'un nœud appelé racine de l'arborescence (elle ne comprend pas de circuits).







On peut obtenir un **graphe de couverture** en fusionnant les nœuds de l'arborescence de couverture qui correspondent au même 'marquage'

Algorithme de construction de l'arborescence de couverture

Pas 1.

A partir de M_0 on indique toutes les transitions validées et les marquages successeurs.

Si un des marquages successeurs est supérieur à M_0, on met ω pour chacune des composantes supérieures.

Pas 2.

Pour chaque nouveau marquage M_i , on fait soit le Pas 2.1 soit le Pas 2.2

Pas 2.1

S'il existe sur le chemin de M_0 à M_i un marquage $M_j=M_i$ alors M_i n'a pas de successeur

Pas 2.2

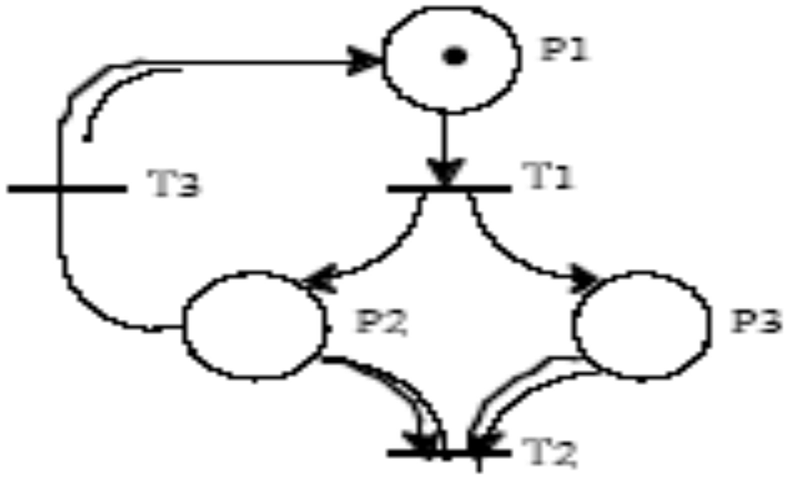
Si non, on prolonge l'arborescence en ajoutant tous les successeurs de M_i
pour chaque successeur M_k de M_i

1 - une composante ω de M_i reste une composante ω de M_k

2 - s'il existe un marquage M_j sur le chemin M_0 à M_k t.q $M_k>M_j$, alors on met ω pour chacune des composantes supérieures.

Exemple

Construire l'arborescence de couverture et le graphe de couverture. En déduire les places qui ne sont pas bornées



Etude des propriétés des RdP par l'algèbre linéaire

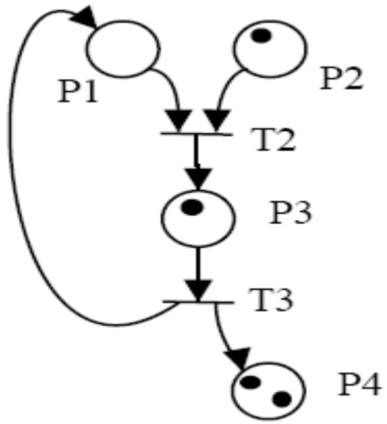
Définition

Un RdP ordinaire non marqué est un quadruplet Q=<P,T, Pre, Post> tel que :

- $P = \{P_1, \ldots, P_n\}$ *est un ensemble fini non vide de places ;*
- $T = \{T_1, \ldots, T_m\}$ *est un ensemble fini non vide de transitions ;*
- $P \bigcap T = \emptyset$;
- $Pre \ : P \times T \rightarrow \{0, 1\}$ *est l'application d'incidence avant telle que si un arc relie* P_i *à* T_j, $Pre(P_i, T_j) = 1$, *sinon* $Pre(P_i, T_j) = 0$;
- $Post \ : P \times T \rightarrow \{0, 1\}$ *est l'application d'incidence arrière telle que si un arc relie* T_j *à* P_i, $Post(P_i, T_j) = 1$, *sinon* $Post(P_i, T_j) = 0$.

Etude des propriétés des RdP par l'algèbre linéaire

Exemple :



			$Post(P_3,T_2)=1$
$i\in\{1,2\}$	$Pre(P_i,T_2)=1$	$i\in\{1,2,4\}$	$Post(P_i,T_2)=0$
$i\in\{3,4\}$	$Pre(P_i,T_2)=0$	$i\in\{1,4\}$	$Post(P_i,T_3)=1$
	$Pre(P_3,T_3)=1$	$i\in\{2,3\}$	$Post(P_i,T_3)=0$
$i\in\{1,2,4\}$	$Pre(P_i,T_3)=0$		

Etude des propriétés des RdP par l'algèbre linéaire

Définition :

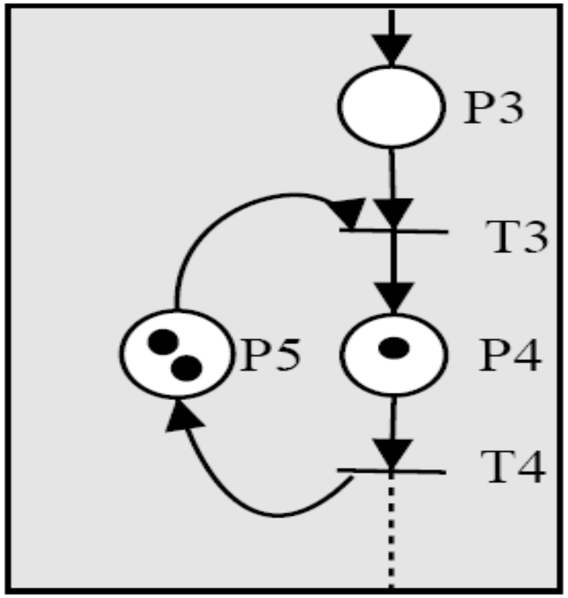
Un RdP généralisé non marqué est défini comme un RdP ordinaire non marqué, sauf que :

- *l'application d'incidence avant est définie par* $Pre : P \times T \rightarrow \mathbb{N}$ *;*
- *l'application d'incidence arrière est définie par* $Post : P \times T \rightarrow \mathbb{N}$*.*

A chaque arc est ainsi associé un nombre naturel appelé "poids" ou valuation qui peut être différent de 1.

Structures fondamentales pour la modélisation

Capacité limitée



Etude des propriétés des RdP par l'algèbre linéaire

A l'aide des applications Pre et $Post$, on peut définir les ensembles des places (transitions) d'entrée (de sortie) d'une transition (place) :

- Ensemble des places d'entrée de la transition T_j : ${}^oT_j = \{P_i \in P \mid Pre(P_i, T_j) > 0\}$
- Ensemble des places de sortie de la transition T_j : $T_j^o = \{P_i \in P \mid Post(P_i, T_j) > 0\}$
- Ensemble des transitions d'entrée de la place P_i : ${}^oP_i = \{T_j \in T \mid Post(P_i, T_j) > 0\}$
- Ensemble des transitions de sortie de la place P_i : $P_i^o = \{T_j \in T \mid Pre(P_i, T_j) > 0\}$

Aux applications Pre et $Post$ sont associées des matrices :

Matrice d'incidence avant associée à l'application Pre, elle est définie par :

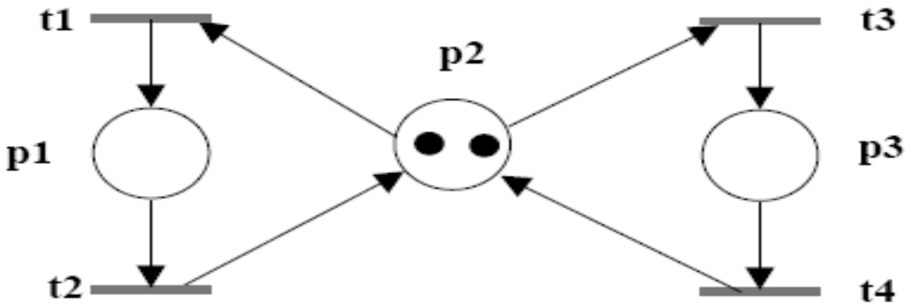
$$W^- = \left[w_{ij}^-\right] \quad \text{avec} \quad w_{ij}^- = Pre(P_i, T_j)$$

Matrice d'incidence arrière associée à l'application $Post$, elle est définie par :

$$W^+ = \left[w_{ij}^+\right] \quad \text{avec} \quad w_{ij}^+ = Post(P_i, T_j)$$

Etude des propriétés des RdP par l'algèbre linéaire

Exemple



arc p2 → t1

PRE

	t1	t2	t3	t4
p1	0	1	0	0
p2	1	0	1	0
p3	0	0	0	1

arc t4 → p2

POST

	t1	t2	t3	t4
p1	1	0	0	0
p2	0	1	0	1
p3	0	0	1	0

Etude des propriétés des RdP par l'algèbre linéaire

Marquage et évolution des RdP

Un RdP marqué est un doublet R=<Q,M_0> dans lequel Q est un RdP non marqué et M_0 un marquage initial

Condition de franchissement Une transition T_j est franchissable si

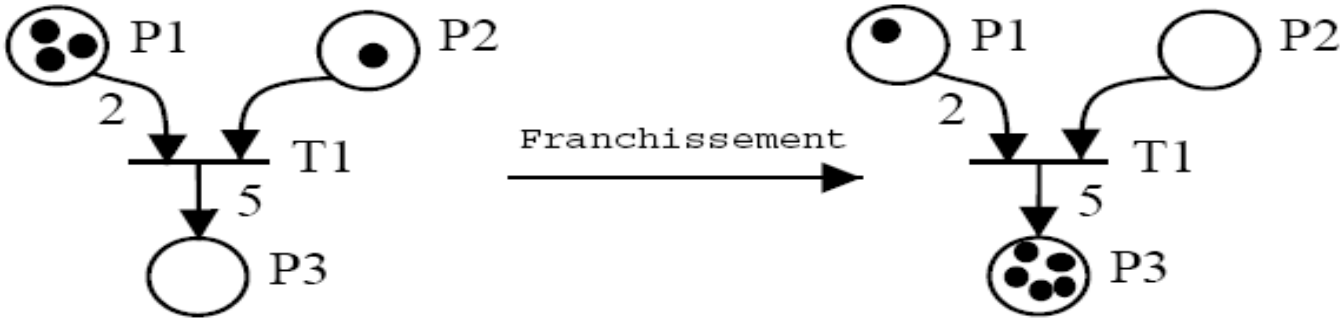
$$\forall P_i \in {}^oT_j, \; M(P_i) \geq Pre(P_i, T_j).$$

Après franchissement, on obtient un nouveau marquage M' donné par :

$$\forall P_i \in P, \; M'(P_i) = M(P_i) - Pre(P_i, T_j) + Post(P_i, T_j).$$

Etude des propriétés des RdP par l'algèbre linéaire

Exemple



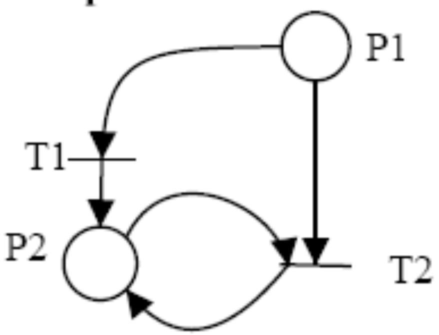
Etude des propriétés des RdP par l'algèbre linéaire

On appelle matrice d'incidence la matrice : **W =W⁺ - W⁻**

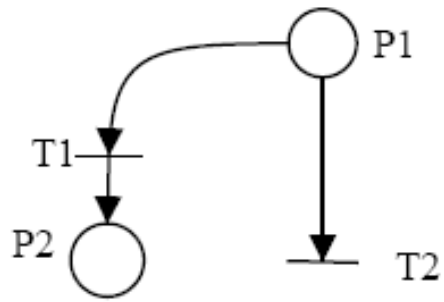
Remarques

- La matrice d'incidence W est indépendante du marquage.
- La matrice d'incidence W est liée à la structure du RdP. Si le réseau est pur alors il est possible de reconstruire le RdP à partir de la matrice d'incidence.

Exemple La matrice d'incidence suivante correspond aux deux RdPs ci-dessous



$$W = \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \end{array} \begin{array}{cc} T_1 & T_2 \\ \multicolumn{2}{c}{\left[\begin{array}{c|c} -1 & -1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right]} \end{array}$$

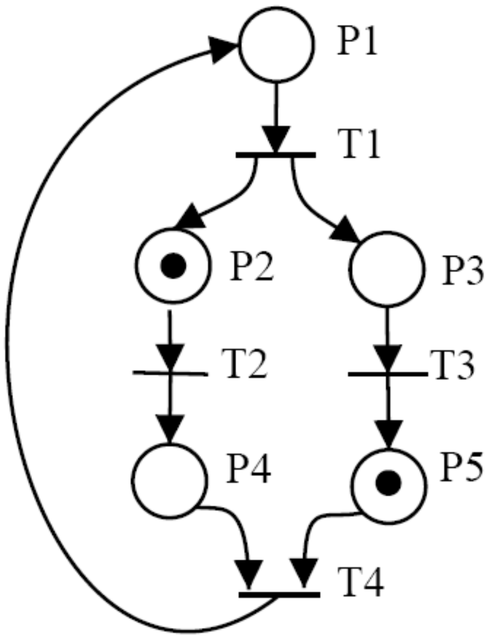


Dans le cas d'un RdP impur, on ne peut donc pas reconstruire le RdP à partir de sa matrice d'incidence. W ne contient donc pas (toujours) toute l'information sur la structure du RdP.

Etude des propriétés des RdP par l'algèbre linéaire

Equation fondamentale

Exemple



$$\underbrace{\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\1\end{bmatrix}}_{M_0} \xrightarrow{T_2} \underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\1\end{bmatrix}}_{M_1} \xrightarrow{T_4} \underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}}_{M_2} \xrightarrow{T_1} \underbrace{\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\\0\end{bmatrix}}_{M_3} \xrightarrow{T_2} \underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\\0\end{bmatrix}}_{M_4}$$

$$\begin{cases} M_1 = M_0 + W\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} \\ M_2 = M_1 + W\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow \quad M_2 = M_0 + W\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}$$

Si la séquence de franchissement S est telle que M_i [S>M_k, alors on a l'équation fondamentale : $\mathbf{M_k = M_i + W.\underline{\mathit{S}}}$

où : $\underline{S}$ est un vecteur dont la composante N° j correspond au nombre de franchissement de la transition j dans la séquence S

Etude des propriétés des RdP par l'algèbre linéaire

Remarques

- Deux séquences franchissables à partir d'un même marquage et de même vecteur caractéristique mènent au même marquage. Le marquage obtenu ne dépend donc pas de l'ordre dans lequel les transitions sont franchies.
- $\underline{ss'} = \underline{s} + \underline{s'}$
- $\underline{s}$ est appelé **vecteur caractéristique possible** s'il lui correspond au moins une séquence de franchissements S à partir du marquage M_k.

Composantes conservatives et invariants de marquage

Soit un vecteur de pondération $F=[q_1,q_2,\ldots,q_n] \in N^n$,
Soit $P(F)$ l'ensemble de places dont le poids q_i associé à la place P_i n'est pas nul

Propriété :

B est une composante conservative si et seulement s'il existe un vecteur de pondération F tel que **$P(F)=B$** et **$F^T.W = 0$**

Un vecteur F qui est solution de **$F^T.W = 0$**, est appelé un **P-semi-flot (P-invariant)**

Un vecteur F qui est solution de **$W. F = 0$**, est appelé un **T-semi-flot (T-invariant)**

Méthodes de réduction : règles de réduction préservant la vivacité et la bornitude

Réduction R1 : substitution d'une place

Une place P_i peut être substituée si :

1. *Les transitions de sortie de P_i n'ont pas d'autre place d'entrée que P_i :*

$$\forall T_j \in P_i^o, \quad {}^oT_j = \{P_i\}.$$

   Le franchissement d'une transition d'entrée de P_i implique ainsi tôt ou tard le franchissement d'une transition de sortie de P_i.

2. *Il n'existe pas de transition T_j qui soit à la fois transition d'entrée de P_i et transition de sortie de P_i :*

$$P_i^o \bigcap {}^oP_i = \emptyset.$$

3. *La place P_i admet au moins une transition de sortie qui n'est pas une transition puits :*

$$\exists T_j \in P_i^o, \; T_j^o \neq \emptyset.$$

Méthodes de réduction : règles de réduction préservant la vivacité et la bornitude

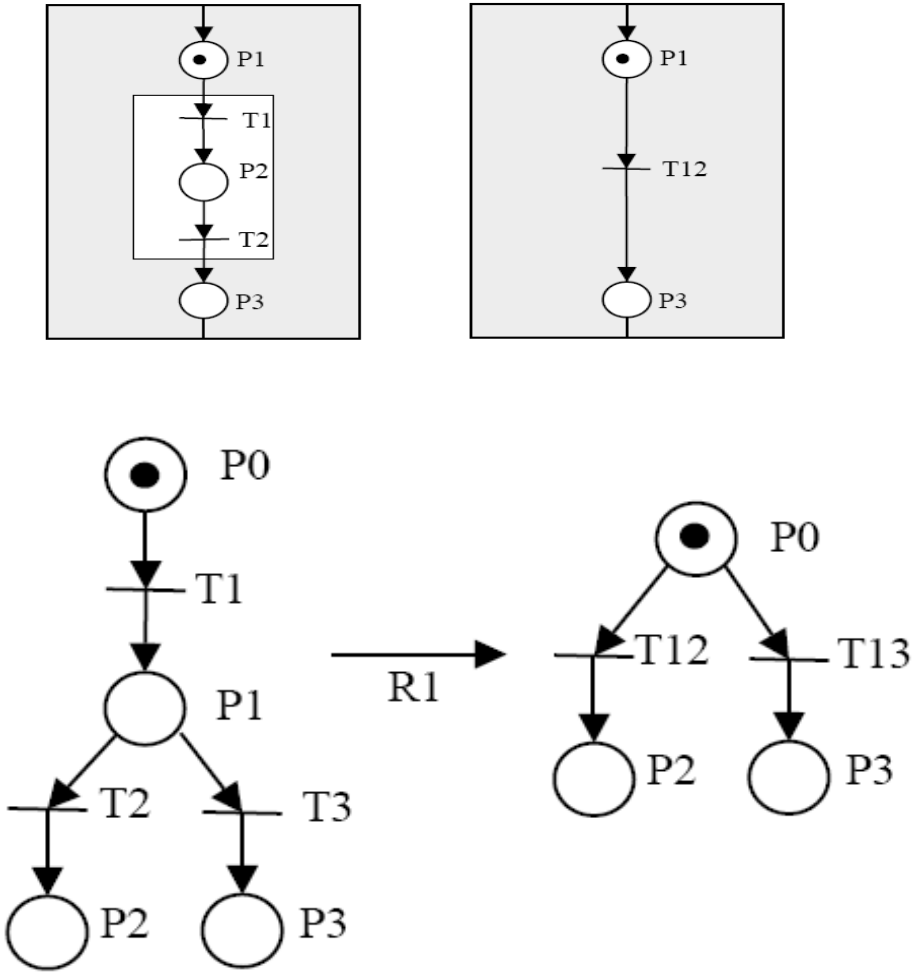
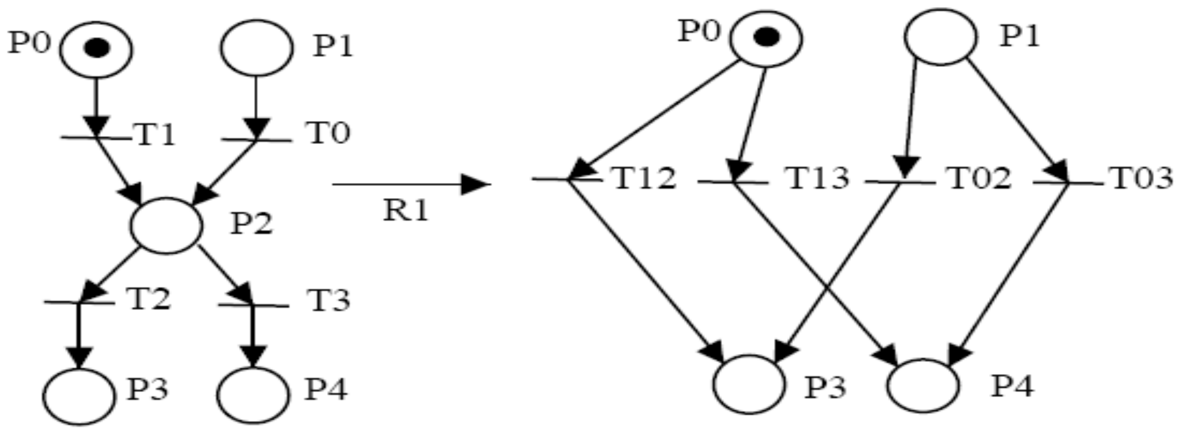


Fig. Réduction R_1

Méthodes de réduction : règles de réduction préservant la vivacité et la bornitude



Propriétés conservées par la réduction R1 le RdP initial et le(s) RdP(s) réduit(s) sont équivalent pour les propriétés suivantes : *borné, sauf, vivant, quasi vivant, sans blocage, avec état d'accueil, conservatif*. Il y a néanmoins une perte d'information puisque s'ils sont bornés, la valeur de la borne n'est pas conservée. Les états d'accueil s'ils existent ne sont pas les mêmes.

Méthodes de réduction : règles de réduction préservant la vivacité et la bornitude

Réduction R2 : place implicite

Une place P_i est implicite si :

1. *Le marquage de P_i n'est jamais un obstacle au franchissement de ses transitions de sortie :*

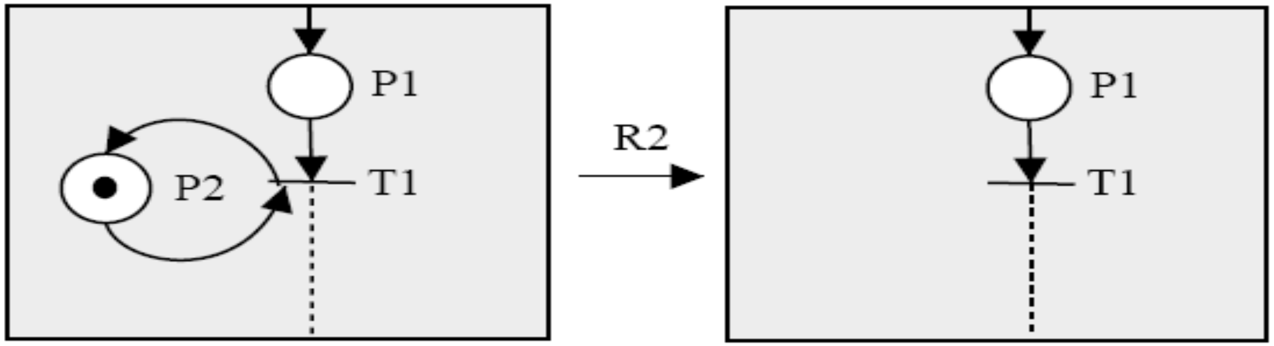
$$\forall T_j \in P_i^o, \quad \forall P_k \in {}^oT_j \setminus \{P_i\}, \quad M(P_k) \geq Pre(P_k, T_j) \Longrightarrow M(P_i) \geq Pre(P_i, T_j)$$

2. *Son marquage se déduit du marquage des autres places par la relation :*

$$M(P_i) = \sum_{k \neq i} \alpha_k M(P_k) + \beta$$

où α_k et β sont des nombres rationnels positifs. On assure ainsi que si les places P_k avec $k \neq i$ sont bornées alors la place P_i est forcement bornée.

Méthodes de réduction : règles de réduction préservant la vivacité et la bornitude



Réduction R2 La réduction R2 consiste à supprimer la place implicite avec ses arcs en entrée et en sortie.

Propriétés conservées par la réduction R2 le RdP initial et le(s) RdP(s) réduit(s) sont équivalents pour les propriétés suivantes : *borné, vivant, quasi vivant, sans blocage, avec état d'accueil, conservatif.*

Réduction R3 : transition neutre

Définition :

(Transition neutre) *Une transition est **neutre** si l'ensemble de ces places d'entrée est égal à l'ensemble de ses places de sortie :*

$$^{o}T_j = T_j^{o}.$$

Réduction R3 La réduction R3 consiste à supprimer la transition neutre T_j avec l'ensemble de ses arcs en entrée et en sortie. Elle ne sera effectuée que s'il existe une transition $T_l \neq T_j$ telle que son franchissement mette suffisamment de marques dans les places d'entrée de T_j pour la rendre franchissable :

$$\exists T_l \neq T_j, \forall P_i \in {}^{o}T_j, \quad Post(P_i, T_l) \geq Pre(P_i, T_j).$$

Propriétés conservées par la réduction R3 le RdP initial et le(s) RdP(s) réduit(s) sont équivalent pour les propriétés suivantes : *borné, sauf, vivant, quasi vivant, sans blocage, avec état d'accueil, conservatif.*

Méthodes de réduction : règles de réduction préservant la vivacité et la bornitude

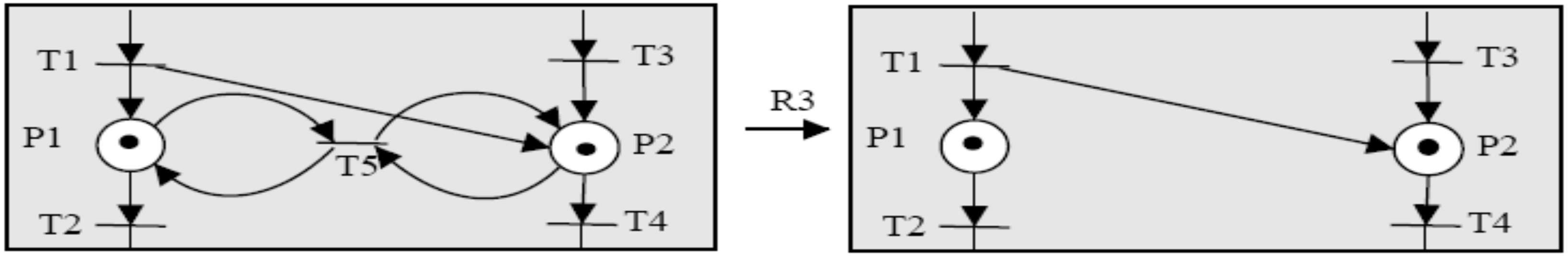


Fig. Réduction R3

Méthodes de réduction : règles de réduction préservant la vivacité et la bornitude

Réduction R4 : transitions identiques

Définition : **(Transitions identiques)** *Deux transitions T_j et T_l sont* ***identiques*** *si elles ont mêmes ensembles de places d'entrée et mêmes ensembles de places de sortie :*

$$^oT_j = {}^oT_l \quad et \quad T_j^o = T_l^o.$$

Réduction R4 La réduction R4 consiste à supprimer l'une des transitions identiques avec l'ensemble de ses arcs en entrée et en sortie.

Propriétés conservées par la réduction R4 le RdP initial et le RdP réduit sont équivalent pour les propriétés suivantes : *borné, vivant, sauf, quasi vivant, sans blocage, avec état d'accueil, conservatif.*

Méthodes de réduction : règles de réduction préservant la vivacité et la bornitude

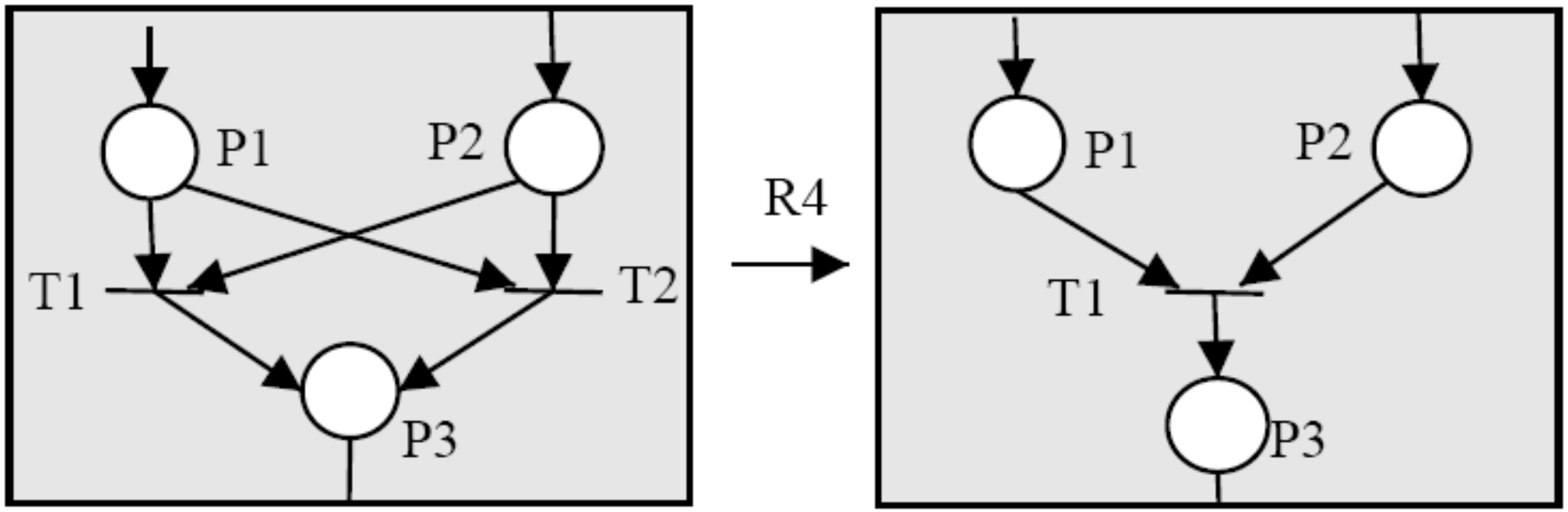
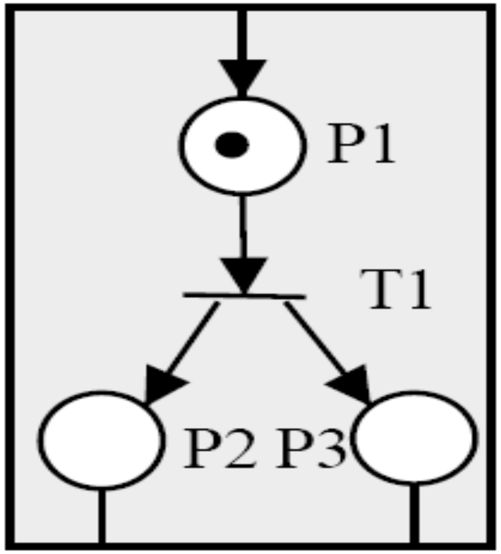


Fig. Réduction R4

Structures fondamentales pour la modélisation

Parallélisme : il représente la possibilité que plusieurs processus évoluent simultanément au sein du même système.



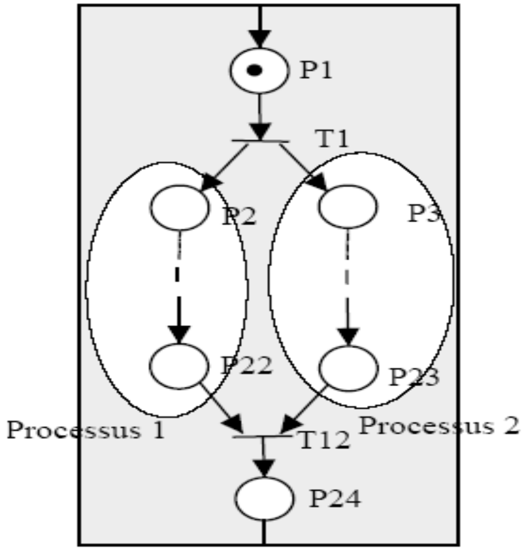


Fig. Parallélisme

Structures fondamentales pour la modélisation

Synchronisation : la synchronisation mutuelle ou rendez-vous permet de synchroniser les opérations de deux processus.

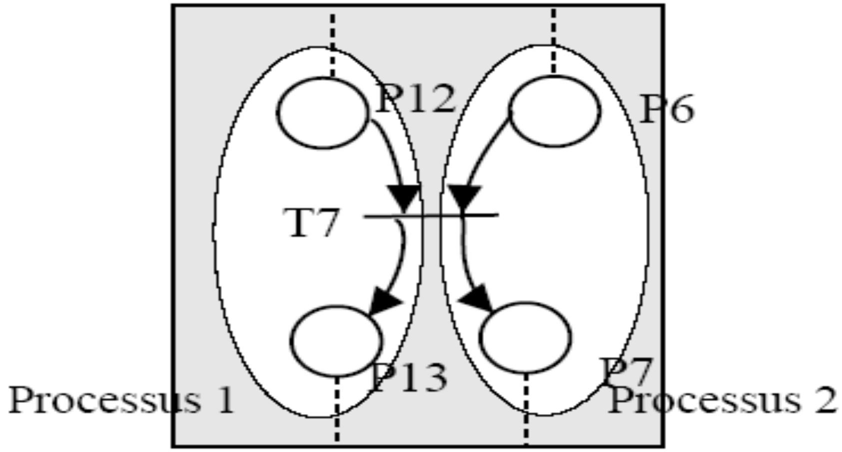


Fig. Synchronisation

Sémaphore : les opérations du processus 2 ne peuvent se poursuivre que si le processus 1 a atteint un certain niveau. Par contre, l'évolution du processus 1 est indépendante du processus 2.

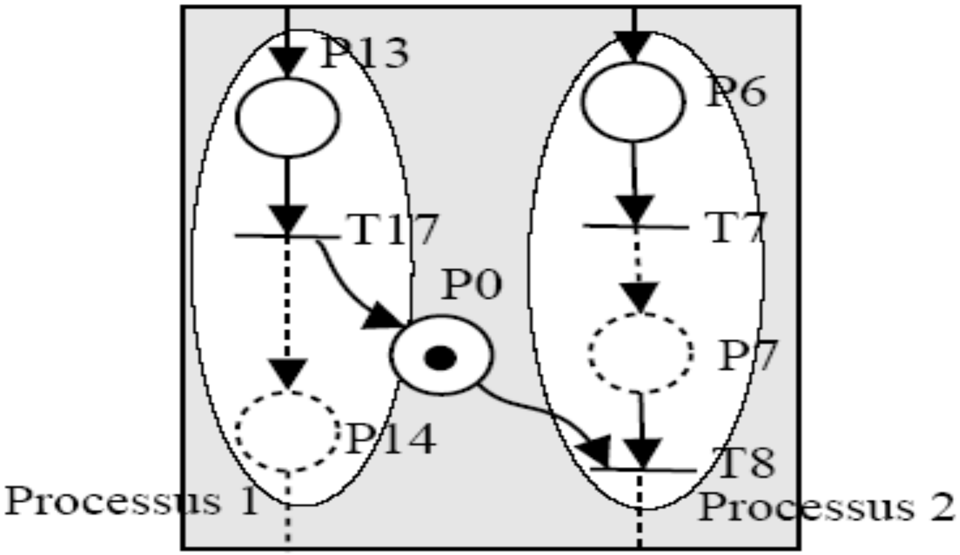


Fig. Sémaphore

Structures fondamentales pour la modélisation

Partage de ressources : cette structure modélise la disponibilité d’une ressource qui peut être utilisée par plusieurs processus

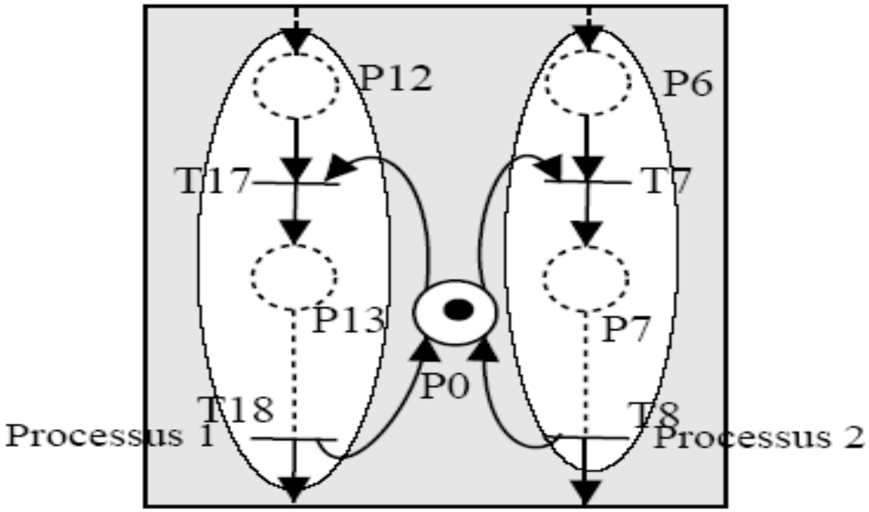


Fig. partage de ressource

Structures fondamentales pour la modélisation

Mémorisation

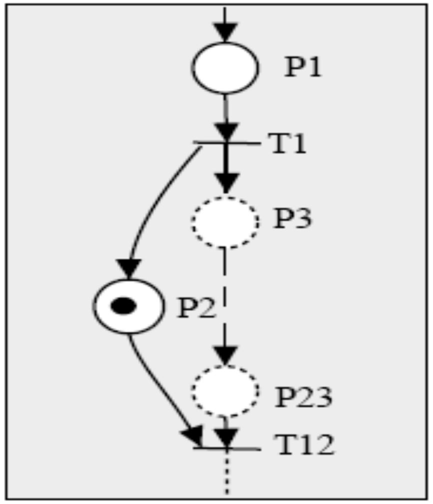


Fig. Mémorisation du franchissement d'une transition

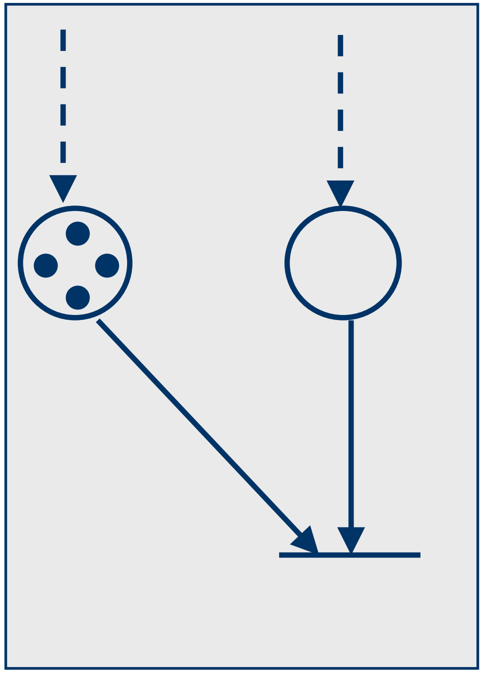


Fig. Mémorisation d'un nombre

Lecture

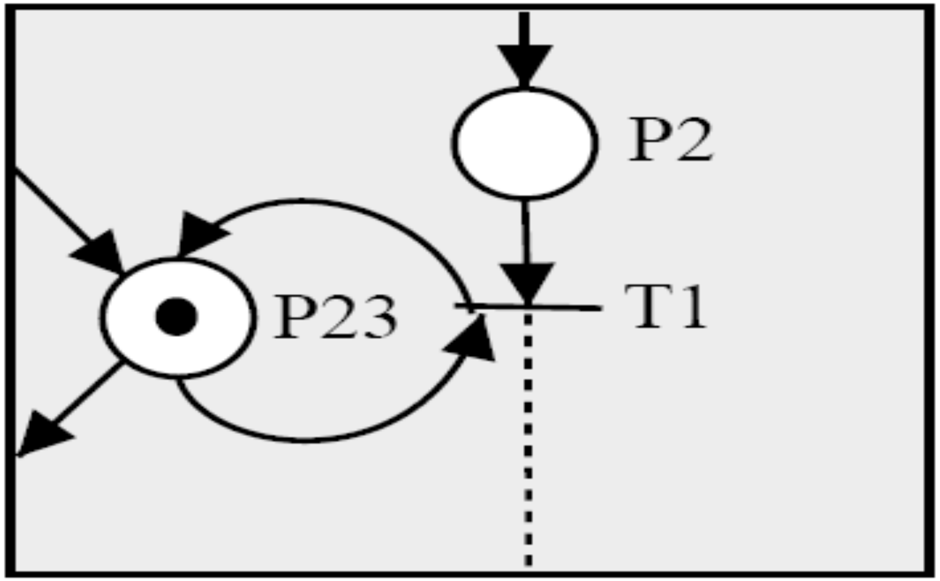


Fig. lecture d'un marquage