École Nationale des Sciences Appliquées
Marrakech

COURS DE MÉCANIQUE DES SYSTÈMES DE SOLIDES INDÉFORMABLES

Pr M.Bourich

Filière: **Enseignements Généraux et Techniques (EGT)**
Niveau: **Cycle Intégré Préparatoire II**
Semestre: **S_4**

Cycle Intégré Préparatoire aux Formations d'Ingénieurs

BIBLIOGRAPHIE

❖Mémoires couronnés par l'académie royale des sciences et belles-Lettres de Bruxelles, tome XI, chapitre VI, 1873.
❖Luis Figuier, Les Merveilles de la science ou description populaire des inventions modernes, Librairie Furne, Editeurs Jouvet et Cie, Tome 1 des suppléments, 1891
❖P.Duhem, L'évolution de la mécanique, A. Hermann, Paris, 1905.
❖R. Bricard, Calcul Vectoriel, Armand colin, Paris, 1929.
❖P.Costabel, Histoire du moment d'inertie, Revue d'histoire des sciences et leurs applications, tome3, n°4, pp. 315-336, 1950.
❖F. Halbwachs, Angles d'Euler, rotation instantanée et opérateurs quantiques de rotation dans l'espace temps, Volume 16, Partie 3 de Annales de l'Institut Henri Poincaré, 1959.
❖F. Balibar, Galilée, Newton lus par Einstein, PUF,1984.
❖C. Chauviré, L'essayeur de Galilée, Belles Lettres, 1989.
❖AGATI, LEROUGE et ROSSETTO, Liaisons, mécanismes et assemblages, DUNOD 1994.
❖S. Pommier & Y. Berthand, Mécanique générales, Dunod, Paris, 2010.
❖M.Hasnaoui et A. EL Maâchai, cours de mécanique 2, Première édition, FSSM, 2010.

Conformément au descriptif de la mécanique des systèmes de solides indéformables, le cours est articulé en sept chapitres :

Calcul vectoriel-Torseurs,
Cinématique du solide,
Géométrie des masses,
Cinétique du solide,
Dynamique du solide,
Liaisons-Forces de liaison,
Mouvement d'un solide autour d'un point ou d'un axe fixes.

Cours: 30 h; TD: 30h; TP: 10h; Évaluation: 6h; VH globale=76
Note Module: Contrôle 1: 40% ; Contrôle 2: 40% : et TD : 20% ;

Chap I: Calcul vectoriel-Torseurs

Galilée : (1564-1642)

La philosophie est écrite dans ce grand livre, l'univers, qui ne cesse pas d'être ouvert devant nos yeux. Mais ce livre ne peut se lire si on ne comprends pas le langage et on ne connaît pas les caractères avec lesquels il est écrit. Or, la langue est celle des mathématiques, et les caractères sont triangles, cercles et d'autres figures géométriques. Si on ne les connaît pas, c'est humainement impossible d'en comprendre même pas un seul mot. Sans eux, on ne peut qu'aller à la dérive dans un labyrinthe obscur et inextricable". G. Galilei, "Il Saggiatore", Rome, 1623

Objectifs :

- Définir un torseur (torsur symétrique et anti-symétrique, invariants scalaires) ;
- Décomposer un torseur (couple et glisseur) ;
- Comprendre la notion de torseur équiprojectif ;
- Décrire les élements de réduction d'un torseur ;
- Déterminer l'axe central.

APPROCHE HISTORIQUE

Pour les problèmes de physique, l'Allemand Hermann Grassman (1809-1877) fut l'un des premiers à utiliser la notation vectorielle.

L'Américain Gibbs (1839-1903) et l'Anglais Heaviside (1850-1925), disciples de Hamilton (l'un des premiers à utiliser la notion de vecteur), donnent au calcul vectoriel sa forme quasi définitive.

L'intérêt de la maitrise du calcul vectoriel est fondamental pour la bonne application des lois de la mécanique.

DÉFINITIONS

❖**ESPACE VECTORIEL**
❖**ESPACE VECTORIEL EUCLIDIEN**
❖**ESPACE AFFINE-ESPACE MÉTRIQUE**

VECTEURS-MOMENT D'UN VECTEUR

On appelle vecteur lié, tout couple (A,) formé de A $\in \xi$ appelé origine ou point d'application et d'un vecteur de E appelé grandeur vectorielle.
Notation: (A,) = (A) : on lit vecteur lié au point A.

Exemples: **-** Force résultante appliquée à un point.
- Champ électrique créé par une charge électrique en un point.

Opérations sur les vecteurs

❖Produit scalaire:

Le produit scalaire est une opération algébrique s'ajoutant aux lois s'appliquant aux vecteurs. À deux vecteurs, elle associe leur produit, qui est un nombre (ou scalaire, d'où son nom). Elle permet d'exploiter les notions de la géométrie euclidienne traditionnelle : longueurs, angles, orthogonalité.

❖Produit vectoriel

Le produit vectoriel est une opération vectorielle effectuée dans les espaces euclidiens orientés de dimension 3. Le formalisme utilisé actuellement est apparu en 1881 dans un manuel d'analyse vectorielle écrit par Josiah Willard Gibbs pour ses étudiants en physique.

Double produit vectoriel

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w} \in$ E.

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$$

Produit mixte

Considérons $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w} \in$ E.

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \det \begin{vmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{vmatrix}$$

TORSEURS

Un torseur est un outil mathématique utilisé principalement en mécanique du solide indéformable, pour décrire les mouvements des solides et les actions mécaniques qu'ils subissent de la part d'un environnement extérieur. Un certain nombre de vecteurs utilisés en mécanique sont des moments : moment d'une force, moment cinétique, moment dynamique. Les champs vectoriels utilisés en mécanique (moment d'une force, moment cinétique, moment dynamique..) possèdent des propriétés communes, d'où l'intérêt d'être modélisés par un même objet mathématique appelé « torseur ».

- ❖Application antisymétrique
- ❖Champ antisymétrique

◆ On appelle torseur [τ] un ensemble formé d'un champ de vecteurs antisymétrique $\vec{u}(M)$ et de son vecteur $\vec{R}$.

Conséquence

Soit O $\in \xi$ et M quelconque, on a $\vec{u}(M) = \vec{u}(O) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{OM}$

C/C : Un torseur est donc caractérisé par la donnée de $\vec{R}$ et de son champ en un point.

Opération sur les torseurs

❖**Addition des torseurs**

❖**Multiplication d'un torseur par un scalaire**

❖**Comoment ou produit scalaire de deux torseurs**

❖**Égalité de deux torseurs**

Axe central d'un torseur

On appelle axe central (Δ) d'un torseur $[\tau(O)] = [\vec{u}(O), \vec{R}]$ avec $\vec{R} \neq \vec{0}$, le lieu des points P tel que : $\vec{u}(P) \wedge \vec{R} = \vec{0}$

Donc $\exists\ \mu \in \Re$ tel que $\vec{u}(O) \wedge \vec{R} + R^2\, \overrightarrow{OP} = \mu \vec{R} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{OP} = \dfrac{\mu \vec{R}}{R^2} - \dfrac{\vec{u}(O) \wedge \vec{R}}{R^2}$

Ainsi, si P $\in$ à l'axe central $\Rightarrow \quad \overrightarrow{OP} = \lambda \vec{R} + \dfrac{\vec{R} \wedge \vec{u}(O)}{R^2}$ (avec $\lambda \in \Re$).

Classification des torseurs

- ❖Glisseur
- ❖Couple

Chap II: Cinématique du Solide

René Descartes : (1596-1650)

René Descartes a écrit les principes de la philosophie en 1644, dont l'objectif est de « donner des fondements rigoureux à la philosophie». La physique cartésienne est fondée sur l'identification de la matière avec la quantité géométrique : la pesanteur et le mouvement sont ramenés à une explication mécaniste. Sa description du monde est essentiellement **cinématique**, le mouvement se transmettant de proche en proche par contact. Dans les Principes de la Philosophie, Descartes distingue la cause première de tous les mouvements (Dieu, auteur de la nature), des causes secondes appelées les lois

De la nature, qui régissent le mouvement des parties de la matière.

Objectifs :

- Décrire et analyser la nature du mouvement d'un système;
- Différencier entre les vitesse linéaire et angulaire;
- Recenser le nombre de paramètres indépendants intervenant dans l'étude cinématique;
- Savoir choisir une base dans laquelle expliciter simplement le mouvement;
- Savoir mettre en œuvre les formules de changement de référentiel pour les vitesses et les accélérations;
- Déterminer le centre instantané de rotation;
- Savoir mettre en œuvre la condition de roulement sans glissement;
- Savoir analyser le mouvement instantané d'un solide et déterminer la base

Approche historique

En mécanique, la cinématique (tiré du nom grec : *kinêma*) est l'étude des mouvements des corps sans tenir compte des causes qui les produisent. Au côté de la notion d'espace qui fut l'objet de la géométrie, la cinématique introduit en outre la notion du temps. On peut dater la naissance de la cinématique moderne à l'allocution de Pierre Varignon en 1700 qui a démontré qu'il est possible de déduire l'accélération de la vitesse instantanée à l'aide d'une simple procédure de calcul différentiel.

Solide rigide:

Un solide rigide ou indéformable est un ensemble de points matériels dont les distances mutuelles restent constantes au cours du temps.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} = 0$$

Champ des vitesses d'un solide:

Le champ des vitesses d'un solide est donc un torseur, on l'appelle ***torseur cinématique***.
Ses éléments de réduction (ou ***coordonnées***) au point A sont:

$$\begin{cases} \vec{\Omega}(S/R_0) : \text{sa résultante} \\ \vec{v}(A/R_0) : \text{son vecteur moment} \end{cases}$$

On le note $[V(A)] = \left[\vec{v}(A/R_0), \vec{\Omega}(S/R_0)\right]$

Champ des accélérations d'un solide:

$$\vec{\gamma}(B/R_0) = \vec{\gamma}(A/R_0) + \left.\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right|_{R_0} \wedge \overrightarrow{AB} + (\vec{\Omega}\cdot\overrightarrow{AB})\vec{\Omega} - \Omega^2\,\overrightarrow{AB}$$

En général, le terme : $(\vec{\Omega}\cdot\overrightarrow{AB})\vec{\Omega} - \Omega^2\,\overrightarrow{AB}$

n'est pas nul. Par conséquent, le champ des accélérations d'un solide n'est pas un torseur.

MOUVEMENTS DE TRANSLATION-ROTATION-TANGENT:

Mouvement de translation:

Le solide (S) est animé d'un mouvement de translation par rapport à R_0 si $\vec{\Omega}(S/R_0) = \vec{0}$, $\forall t$. Il en résulte que $\forall$ A, B $\in$ (S), $\vec{v}(B/R_0) = \vec{v}(A/R_0)$

Rotation d'un solide autour d'un axe fixe:

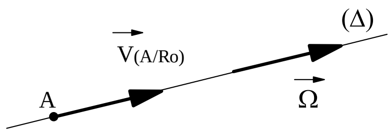
Lorsqu'il s'agit d'une rotation de (S) autour d'un axe (Δ) on retient que:

- le torseur cinématique est un ***glisseur***;
- l'axe de rotation du solide est l'***axe central du glisseur***;
- $[\mathcal{V}(A)] = [\vec{0}, \vec{\Omega}(S/R_0)]$ si $A \in (\Delta)$;
- $[\mathcal{V}(B)] = [\vec{v}(B/R_0), \vec{\Omega}(S/R_0)]$ si $B \notin (\Delta)$.

Mouvement hélicoïdal

Dans un mouvement hélicoïdal, tout point M $\in$ (S) tourne autour d'un axe (Δ) et, en même temps, se déplace suivant cet axe.
Soit A un point de (S) appartenant à (Δ). On a:

$$\vec{v}(M/R_0) = \underbrace{\vec{v}(A/R_0)}_{\text{translation}} + \underbrace{\vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{AM}}_{\text{rotation}}$$



Schématisation - Interprétation

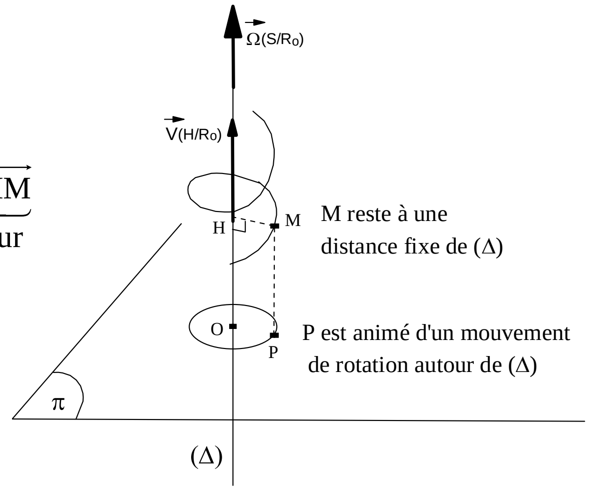
D'après la figure, le point P représente la projection de M sur le plan (π). Ainsi, on a:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OP}$$

$$\vec{v}(M/R_0) = \vec{v}(H/R_0) + \vec{v}(P/R_0)$$

$$= \vec{v}(H/R_0) + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{OP}$$

$$= \underbrace{\vec{v}(H/R_0)}_{\substack{\text{translation} \\ \text{le long de l'axe}}} + \underbrace{\vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{HM}}_{\substack{\text{rotation autour} \\ \text{de l'axe}}}$$



Mouvement tangent:

Soit H $\in (\Delta)$ on a:

$$\vec{v}(A/R_0) = \vec{v}(H/R_0) + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{HA}$$
$$= \lambda\vec{\Omega}(S/R_0) + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{HA}$$

♦♦ Si $\vec{v}(H/R_0) = \vec{0}$, on dira que le mouvement du solide est tangent à une rotation d'axe (Δ).

♦♦ Si $\vec{v}(H/R_0) \neq \vec{0}$ le mouvement du solide est dit tangent à un mouvement hélicoïdal ayant (Δ) comme axe instantané de rotation.

Composition des Mouvements:

$$\vec{v}(M/R_0) = \vec{v}(M/R_1) + \vec{v}(O_1/R_0) + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1M} = \vec{v}_r(M) + \vec{v}_e(M)$$

$\vec{v}_a(M) = \vec{v}(M/R_0)$: vitesse absolue du point M

$\vec{v}_r(M) = \vec{v}(M/R_1)$: vitesse relative du point M

$\vec{v}_e(M) = \vec{v}(O_1/R_0) + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1M}$: vitesse d'entraînement du point M.

Composition des vecteurs rotations:

$$\vec{\Omega}(S/R_0) = \vec{\Omega}(S/R_1) + \vec{\Omega}(R_1/R_2) + \vec{\Omega}(R_2/R_3) + \ldots + \vec{\Omega}(R_{n-1}/R_n) + \vec{\Omega}(R_n/R_0)$$

Composition des accélérations:

$$\vec{\gamma}(M/R_0) = \vec{\gamma}(M/R_1) + 2\vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{v}(M/R_1) + \vec{\gamma}(O_1/R_0) + \left.\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right|_{R_0} \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O_1M})$$

$$\vec{\gamma}(M/R_0) = \vec{\gamma}_a(M) = \vec{\gamma}_r(M) + \vec{\gamma}_c(M) + \vec{\gamma}_e(M)$$

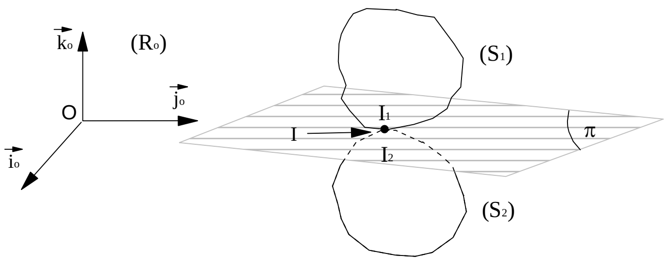
$$\begin{cases} \vec{\gamma}_r(M) = \vec{\gamma}(M/R_1) & : \text{accélération relative} \\ \vec{\gamma}_c(M) = 2\vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{v}(M/R_1) & : \text{accélération de Coriolis} \\ \vec{\gamma}_e(M) = \vec{\gamma}(O_1/R_0) + \left.\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right|_{R_0} \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O_1M}) & : \text{accélération d'entraînement} \end{cases}$$

Cinématique des solides en contact:

Vitesse de glissement:

$$\boxed{\vec{v}_g(S_1/S_2) = \left.\frac{d\overrightarrow{I_2I_1}}{dt}\right|_R = \vec{v}(I_1/R) - \vec{v}(I_2/R)} \quad (\forall \text{ le repère R})$$

C'est une vitesse indépendante du repère par rapport auquel (S_1) et (S_2) sont en mouvement, et elle est contenue dans le plan tangent (π) commun à (S_1) et (S_2).



Roulement et pivotement:

Soit $M \in S_1$, la relation de transfert du torseur cinématique $\Rightarrow$

$$\vec{v}(M/S_2) = \vec{v}(I_1/S_2) + \vec{\Omega}(S_1/S_2) \wedge \overrightarrow{I_1M}$$

$$\vec{v}(M/S_2) = \vec{v}_g(S_1/S_2) + \vec{\Omega}(S_1/S_2) \wedge \overrightarrow{I_1M}$$

Le vecteur $\vec{\Omega}(S_1/S_2)$ peut être décomposé comme suit:

$$\vec{\Omega}(S_1/S_2) = \vec{\Omega}_t + \vec{\Omega}_n$$

$$\begin{cases} \vec{\Omega}_t : \text{composante de } \vec{\Omega}(S_1/S_2) \text{ contenu dans le plan } (\pi) \\ \vec{\Omega}_n : \text{composante de } \vec{\Omega}(S_1/S_2) \text{ normale au plan } (\pi) \end{cases}$$

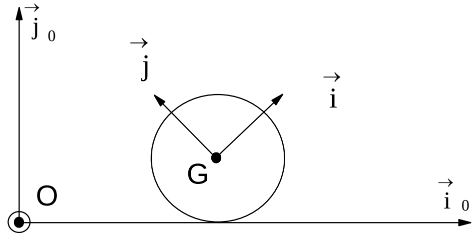
Le vecteur $\vec{\Omega}_t$ exprime une rotation instantanée autour d'un axe du plan tangent; il caractérise le roulement de (S_1) / (S_2).

Le vecteur $\vec{\Omega}_n$ exprime une rotation instantanée autour d'un axe $\perp$ au plan tangent; il caractérise le pivotement de $(S_1)/(S_2)$. Ainsi, $\vec{\Omega}_t$ /($\vec{\Omega}_n$) est la vitesse angulaire de roulement/(pivotement).

Finalement: $\vec{v}(M/S_2) = \underbrace{\vec{v}_g(S_1/S_2)}_{\text{vitesse de glissement}} + \underbrace{\vec{\Omega}_t \wedge \overrightarrow{I_1M}}_{\text{vitesse de roulement}} + \underbrace{\vec{\Omega}_n \wedge \overrightarrow{I_1M}}_{\text{vitesse de pivotement}}$.

Mouvement plan d'un solide:

On appelle mouvement plan d'un solide (S), un mouvement tel que chaque point de (S) se déplace dans un plan parallèle à un plan fixe (π_0) dans le référentiel considéré R_0.



$$\vec{v}(M/R_0) = \underbrace{\vec{v}(I/R_0)}_{=\vec{0}} + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{IM}$$ (I point commun à (π) et (Δ)).

$$\vec{v}(M'/R_0) = \underbrace{\vec{v}(I/R_0)}_{=\vec{0}} + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{IM'}$$

Le mouvement plan peut s'interpréter comme étant une rotation (instantanée) pure autour de l'axe (Δ) $\perp$ à (π) en I avec I appartenant à l'axe central (Δ) du glisseur (l'axe (Δ) peut changer avec le temps).

Centre instantané de rotation CIR:

L'axe instantané de rotation est un terme utilisé en mécanique classique et plus particulièrement en cinématique pour désigner l'axe autour duquel tourne un solide à un instant donné par rapport à un référentiel. Si l'on peut utiliser la simplification des problèmes plans, on parle alors du centre instantané de rotation (CIR).

- I est donc un point central du torseur cinématique de S par rapport à R_0. Le C.I.R correspond donc à l'intersection de l'axe central du torseur cinématique de S/R avec le plan d'évolution du solide S.
- Le CIR est "instantané", c'est à dire que, dans le cas général, sa position est attachée à un instant donnée et à une position particulière du mécanisme.
- Le CIR peut être un point défini en dehors de la limite matérielle du solide S.

Base et roulante-Étude analytique:

Par définition, ***la base*** est le lieu des C.I.R. dans R_0 lorsque t varie et ***la roulante*** est le lieu des C.I.R. dans R (lié à S) lorsque t varie.

$$\begin{cases} \dfrac{d\alpha}{dt} - (x\sin\theta + y\cos\theta)\dot{\theta} = 0 \\ \dfrac{d\beta}{dt} + (x\cos\theta - y\sin\theta)\dot{\theta} = 0 \end{cases} \quad (2) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = x(\theta) \\ y = y(\theta) \end{cases}$$

Ce sont les équations paramétriques de la ***roulante***.

Compte tenu des équations (1) et (2) on a:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \alpha - \frac{d\beta}{d\theta} \\ y_0 &= \beta + \frac{d\alpha}{d\theta} \end{aligned}\right\}$$: Ce sont les équations paramétriques de ***la base***.

Chap III: Géométrie de masse

Руђер Бошковић (1711-1787)

Roger Josef Boscovich : (1711-1787)

Pour R.J. Boscovich, les corps ne sont continus qu'en apparence, en réalité, ils sont formés de points matériels isolés ; « un corps continus soit un concept intuitif, primitif, on peut toujours le penser comme un ensemble de points matériels, liés entre eux par des liens sans masse, de telle sorte que la masse totale soit la somme de la masse des tous les points, et que la forme, donc la disposition des ces points, soit garantie par le "squelette" des liens imaginaires ».

Objectifs :

- Savoir calculer et commenter la matrice d'inertie ;
- Savoir déterminer le repère et l'axe principal d'inertie ;
- Déterminer et différencier entre centre de masse et centre d'inertie ;
- Comprendre la notion de moment d'inertie ;
- Savoir appliquer le théorème de Guldin .

Approche historique

La notion de barycentre est utilisée en physique, et en particulier en mécanique et en astronomie, pour simplifier l'étude du mouvement d'un système. Le premier à avoir étudié le barycentre en tant que centre des poids (ce qu'on appelle de nos jours le centre de gravité) est le mathématicien et physicien Archimède. Il est un des premiers à comprendre et expliciter le principe des moments, le principe des leviers et le principe du barycentre. Il écrit dans son traité sur le centre de gravité de surface plane : « Tout corps pesant a un centre de gravité bien défini en lequel tout le poids du corps peut être considéré comme concentré ». Il est le premier à avoir cherché des centres de gravité de surface comme des demi-disques, des paraboles. Il procède par approximations successives et a pu prouver que la recherche d'un centre de gravité utilise des méthodes analogues à celle du calcul d'aire. Par la suite, sur la base de ses travaux, Guldin à développé les deux théorèmes portant son nom.

Masse

La mécanique classique associe à tout corps matériel une grandeur qui représente sa masse notée m. La masse vérifie les trois axiomes suivants:

Positivité: $\forall$ le système matériel (S), $m(S) \geq 0$;

Additivité: $\forall$ la fragmentation de (S) en sous-systèmes (S_i), $m(S) = \Sigma_i m(S_i)$;

Invariabilité: La masse de tout système est invariante dans tout mouvement de ce système (vitesses très faibles devant la célérité de la lumière).

Centre de masse

On l'appelle également centre d'inertie ou centre de gravité et on le note G en général.

Définitions

• Système discret: Dans le cas de n point matériels P_i de masse m_i on a:

$$m(S)\,\vec{OG} = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\vec{OP_i}$$: O est un point quelconque de l'espace

$$m(S) = \sum_i m_i = \sum_i m(S_i)$$

Si $O \equiv G$ on aura: $\sum_{i=1}^{n} m_i\,\vec{GP_i} = \vec{0}$

• Système continu:

$m\,\vec{OG} = \int_{(S)} \vec{OP}\,dm$, avec dm désignant un élément de masse autour du point P et

$m = \int_{(S)} dm$.

Si $O \equiv G$ on aura : $\int_{(S)} \vec{GP}\,dm = \vec{0}$

Théorème de Guldin

Les méthodes pratiques de recherche de G dans le cas de corps homogènes :

a- Quand c'est possible, on décompose le système en éléments plus simples dont on connaît les centres de masse, puis on détermine le barycentre de ceux-ci (exemple : centre de masse du système sphère - cylindre).

b- Utiliser les symétries du système lorsqu'elles existent : le centre de masse appartient aux éléments de symétrie.

c- Lorsqu'il s'agit de déterminer les centres de masse d'arcs, de courbes planes ou de surfaces planes on regarde s'il y a une possibilité d'utiliser un des deux théorèmes de Guldin.

Moment d’inertie - Opérateur d’inertie

La notion de moment d'inertie présente un grand intérêt sur le plan de la véritable histoire de la mécanique et sur celui de la philosophie et de ses principes. C'est en 1673 que Huygens, dans la solution du problème du centre d'oscillation du pendule composé (livre : Traité du Pendule), fit apparaître pour la première fois une quantité de la forme . C'est en 1810-1811 que cette quantité intervint pour la première fois sous le nom de moment d'inertie, et d'une manière officielle et systématique, dans l'enseignement de la Mécanique des solides indéformables

Concernant la signification physique, le moment d'inertie est une grandeur qui caractérise la géométrie des masses d'un solide, c'est-à-dire la répartition de la matière en son sein. Il quantifie également la résistance à une mise en rotation de ce solide (ou plus généralement à une accélération angulaire).

Moment d'inertie

On peut définir la distance de M par rapport à un point O, une droite (Δ) ou un plan (π). Il leur correspond respectivement des moments d'inertie par rapport à un point, un axe ou un plan. Ils sont définis par r^2dm, avec r désignant la distance du point M, de masse dm, par rapport au point O, à l'axe (Δ) ou au plan (π).

Pour le solide c'est $\int_{(S)} r^2 dm$

Notations: I(O, S), I(Δ, S) et I(π, S) ou simplement I_o, I_Δ et I_π.

MATRICE D'INERTIE

$$\begin{cases} J(O,S)(\vec{i}) = I_{Ox}\,\vec{i} - I_{xy}\,\vec{j} - I_{xz}\,\vec{k} \\ J(O,S)(\vec{j}) = -I_{xy}\,\vec{i} + I_{Oy}\,\vec{j} - I_{yz}\,\vec{k} \\ J(O,S)(\vec{k}) = -I_{xz}\,\vec{i} - I_{yz}\,\vec{j} + I_{Oz}\,\vec{k} \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} +A & -F & -E \\ -F & +B & -D \\ -E & -D & +C \end{pmatrix}}_{\substack{\text{matrice d'inertie} \\ (3\times3)}} \times \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}}_{\substack{\text{composantes de } \vec{u} \\ (3\times1)}} = \underbrace{\begin{pmatrix} +\alpha A - \beta F - \gamma E \\ -\alpha F + \beta B - \gamma D \\ -\alpha E - \beta D + \gamma C \end{pmatrix}}_{\substack{\text{composantes de } J(O,S)(\vec{u}) \\ (3\times1)}}$$

Matrice principale d'inertie

Lorsque les produits d'inertie de la matrice II(O,S) sont nuls dans la base b, le repère R(O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) sera appelé repère principal d'inertie, ses axes sont les axes principaux d'inertie et la matrice II(O,S) est la matrice principale d'inertie.

$$II(O,S) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$ dans une base principale d'inertie b ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$)

Examinons les trois cas suivants:

- Lorsque les trois éléments de la diagonale sont distincts (A ≠ B ≠ C), il existe un seul repère principal d'inertie.

- Lorsque deux parmi les trois éléments de la diagonale sont identiques et différents du troisième (exemple A = B ≠C), il existe une infinité de repères principaux d'inertie ayant l'axe Oz en commun (symétrie cylindrique).

- Lorsque les éléments de la diagonale sont identiques (A = B = C), toute direction passant par O est une direction principale d'inertie et tout repère ayant O comme origine est un repère principal d'inertie. On dira alors que l'opérateur est sphérique (symétrie sphérique).

Théorème de Huygens

Considérons le cas de la figure suivante:

On a: $I(\Delta,S) = \vec{u}\cdot J(O,S)(\vec{u}) = \vec{u}\cdot J(G,S)(\vec{u}) + \vec{u}\cdot J(O,m_G)(\vec{u})$

$$= I(\Delta_G,S) + m\,\vec{u}\cdot[\overrightarrow{OG}\wedge(\vec{u}\wedge\overrightarrow{OG})]$$

$$= I(\Delta_G,S) + m(\vec{u}\wedge\overrightarrow{OG})\cdot(\vec{u}\wedge\overrightarrow{OG})$$

$$= I(\Delta_G,S) + m(\vec{u}\wedge\overrightarrow{OG})^2$$

$$\boxed{I(\Delta,S) = I(\Delta_G,S) + md^2(G,\Delta)}$$

Théorème de Huygens classique

Chap IV: Cinétique du Solide

Johan Samuel König (Koenig) : (1712-1757)

Les travaux de Koening publié dans son livre « Elément de géométrie contenant les six premiers livres d'Euclide », permettent le rapprochement des concepts de la cinématique (vitesse, accélération) et ceux de la géométrie des masses (centre de masse, moment d'inertie) donnant naissance à La **cinétique** (appellée aussi cinématique des masses).

Objectifs :

- Maitriser la notion du Torseur cinétique (quantité de mouvement, moment cinétique) ;
- Maitriser la notion du Torseur dynamique (quantité d'accélération, moment dynamique) ;
- Comprendre la notion de référentiel barycentrique ;
- Comprendre et savoir appliquer le théorème de Koenig ;

Définitions des cinq quantités cinétiques:

La quantité de mouvement: $\vec{p}(M/R_0) = m\,\vec{v}\,(M/R_0)$

Le moment cinétique (ou moment de la quantité de mouvement) / à O:

$$\vec{\sigma}(O, M/R_0) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}(M/R_0) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}(M/R_0)$$

La quantité d'accélération: $\vec{a}(M/R_0) = m\vec{\gamma}(M/R_0)$

Le moment dynamique (ou moment de la quantité d'accélération) / à O:

$$\vec{\delta}(O, M/R_0) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{a}(M/R_0) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{\gamma}(M/R_0)$$

L'énergie cinétique: $E_c(M/R_0) = \frac{1}{2} m\vec{v}^{\,2}(M/R_0)$

Moment Cinétique :

Le moment cinétique, est la grandeur physique qui joue dans le cas d'une rotation, un rôle analogue à celui de la quantité de mouvement pour une translation ; si la conservation de la quantité de mouvement pour un système isolé est liée à l'invariance par translation dans l'espace (propriété d'homogénéité de l'espace), la conservation du moment cinétique est liée à l'isotropie de l'espace.

$$\vec{\sigma}(O,S/R_0) = \vec{\sigma}(G,S/R_0) + \vec{\sigma}(O,m_G/R_0)$$

$$\begin{cases} \vec{\sigma}(O,S/R_0) : \text{moment cinétique} \\ m\vec{v}(G/R_0) : \text{résultante cinétique} \end{cases}$$

$$\vec{\sigma}(G,S/R_0) = \vec{\sigma}(G,S/R_G)$$

$$\sigma(\Delta,S/R_0) = \vec{\sigma}(A,S/R_G)\cdot\vec{u}$$

Moment dynamique :

$$\begin{cases} \vec{\delta}(O, S/R_0) : \text{moment dynamique} \\ m\vec{\gamma}(G/R_0) : \text{résultante dynamique} \end{cases}$$

$$\delta(\Delta, S/R_0) = \vec{\delta}(A, S/R_0) \cdot \vec{u}$$

$$\begin{cases} \vec{\delta}(G, S/R_0) = \left.\dfrac{d\vec{\sigma}(G, S/R_0)}{dt}\right|_{R_0} \\ \vec{\delta}(I_1, S_1/R_0) = \left.\dfrac{d\vec{\sigma}(I_1, S_1/R_0)}{dt}\right|_{R_0} \quad : \text{s'il y a absence de glissement de } (S_1) \text{ par rapport à } R_0 \\ \vec{\delta}(I, S/R_0) = \left.\dfrac{d\vec{\sigma}(I, S/R_0)}{dt}\right)_{R_0} + \vec{v}(I/R_0) \wedge m\vec{v}(G/R_0) \end{cases}$$

Énergie Cinétique

En histoire des sciences, G. Leibniz, s'opposant à Descartes, qui estimait que la quantité de mouvement se conservait toujours, développa l'idée de la « force vive » (vis viva), à laquelle il attribuait la valeur mv^2. La force vive est donc le double de l'énergie cinétique. La force vive est un concept obsolète où on trouve la première expression mathématique de ce qui sera connu comme la loi de la conservation de l'énergie. Elle peut être considérée comme une sorte d'énergie cinétique ou d'énergie reliée au mouvement des objets. D'où la naissance du concept énergie cinétique (du Grec « énergeia »), qui détermine l'énergie que possède un corps du fait de son mouvement par rapport à un référentiel donné.

Deuxième théorème de Kœnig :

$$E_c(S/R_0) = E_c(S/R_G) + \frac{1}{2} m\left(\vec{v}(G/R_0)\right)^2$$

$$E_c(S/R_0) = \frac{1}{2} \underbrace{\vec{\Omega}^t(R/R_0)}_{(1\times3)} \underbrace{II(A,S)}_{(3\times3)} \underbrace{\vec{\Omega}(R/R_0)}_{(3\times1)}$$

$$E_c(S/R_0) = \underbrace{\frac{1}{2} {}^t\vec{\Omega}(R/R_0) II(G,S) \vec{\Omega}(R/R_0)}_{\text{rotation}} + \underbrace{\frac{1}{2} m\left(\vec{v}(G/R_0)\right)^2}_{\text{translation}}$$

Chap V: Dynamique du Solide

Isaac Newton : (1642-1727)

Newton formule l'hypothèse audacieuse selon laquelle la Lune « tombe » sur la Terre de la même manière qu'un objet une pomme par exemple... tombe sur le sol. Mais en raison de sa vitesse initiale, la Lune décrit une trajectoire curviligne. Chute verticale et mouvement orbital sont donc des mouvements de même nature. Puis Newton étend cette hypothèse à tout corps céleste en orbite et aboutit à la loi suivante : « Deux corps quelconques s'attirent selon une force proportionnelle au produit de leur masse et inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare».

Objectifs :

- Comprendre la notion de référentiel galiléen ;
- Maitriser et savoir appliquer le principe fondamental de la dynamique ;
- Savoir mettre en oeuvre les théorèmes généraux;
- Maitriser les notion de fonction de forces ,de potentiel et de la puissance;
- Interpretation de la résolution des équations différentielles du mouvement ;

Approche historique :

La cinématique ne peut constituer à elle seule la science du mouvement, dans la mesure précisément où elle ne tient compte ni des causes qui le produisent ni de ce à quoi il s'applique. La science galiléenne laisse sans réponse la question des rapports entre la matière et le mouvement, qui, par contre, était au cœur de la théorie d'Aristote. On verra comment Newton, par l'introduction d'une dynamique fondée sur les concepts renouvelés de masse et de force, pensera avoir réglé cette question. On constatera que, comme l'ont souligné les auteurs du XIX^{e} siècle, et notamment Mach, Newton n'est pas parvenu à remplir entièrement son programme, dans la mesure où il n'a pas su donner du mouvement de translation uniforme, dit «inertiel», une explication «matérialiste», c'est-à-dire uniquement en termes d'espace, de temps et de matière. On verra comment Einstein, avec la théorie de la relativité générale et l'idée que la structure géométrique de l'espace est déterminée par la distribution des masses qui s'y trouvent, a finalement résolu le problème du lien entre la cinématique et la dynamique.

Torseur des forces appliquées à (S):

$$\begin{cases} \vec{R}(F \to S) = \sum_i \vec{f}(M_i) + \int_S \vec{f}_\tau(M)d\tau(M) + \int_S \vec{f}_\sigma(M')d\sigma(M') : \textit{résultante} \\ \vec{M}(A, F \to S) = \sum_i \overrightarrow{AM_i} \wedge \vec{f}(M_i) + \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{f}_\tau(M)d\tau + \int_S \overrightarrow{AM'} \wedge \vec{f}_\sigma(M')d\sigma + \int_S \vec{C}_\tau(M)d\tau : \textit{moment} \end{cases}$$

Classification des forces :

Dans cette classification on distingue les interactions de chaque point du système (S) avec les autres points du système (forces intérieures) et les forces s'exerçant sur les points du système et dues à des éléments extérieurs à (S) (forces extérieures).

Ainsi, le torseur $[F \to S]$ peut être décomposé comme suit:

$$[F \to S] = [F_{int} \to S] + [F_{ext} \to S]$$

$[F_{int} \to S]$ torseur des forces intérieures.

$[F_{ext} \to S]$ torseur des forces extérieures.

Principe fondamental de la dynamique (PFD) ou axiome de la dynamique :

On admet l'existence de repères privilégiés dits “repères absolus”, R_u, et une chronologie de temps “temps absolu” tels que, dans tout mouvement d'un système matériel rapporté à ces repères et temps, le torseur dynamique soit équivalent au torseur des forces extérieures:

$$[D(S/R_u)] = [F_{ext} \to S]$$

A chaque instant, le torseur dynamique est égal au torseur des forces extérieures.

$$\begin{cases} m\vec{\gamma}(G/R_u) = \vec{R}(F_{ext} \to S) : \text{Théorème du centre de masse} \\ \vec{\delta}(A, S/R_u) = \vec{M}(A, F_{ext} \to S) : \text{Théorème du moment cinétique} \end{cases}$$

Théorème des interactions ou théorème de l'action et de la réaction:

$$[D(S/R_u)] = [F_{ext} \rightarrow S] + \underbrace{[F_{S_2} \rightarrow S_1] + [F_{S_1} \rightarrow S_2]}_{=[0]\ \text{torseur nul}}$$

$$\begin{cases} \vec{R}(F_{S_1} \rightarrow S_2) = -\vec{R}(F_{S_2} \rightarrow S_1) \\ \vec{M}(A, F_{S_1} \rightarrow S_2) = -\vec{M}(A, F_{S_2} \rightarrow S_1) \end{cases}$$

$$[F_{int} \rightarrow S] = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{[F_{int\ à\ S_i} \rightarrow S_i]}_{=[0]} + \underbrace{\sum_{i \neq j} [F_{S_i} \rightarrow S_j]}_{=[0]}$$

Changement de repère - Repère galiléen :

Le choix du référentiel d'étude n'est pas uniquement guidé par des considérations techniques de complexité plus ou moins grande d'écriture des équations du mouvement, par exemple selon l'orientation des axes, le système de coordonnées (cartésiennes, sphériques, etc.), ou l'origine des dates, mais détermine également du point de vue fondamental le cadre spatio-temporel d'étude des phénomènes considérés.

En effet, pour un référentiel quelconque, l'espace n'apparaîtra pas nécessairement homogène et / ou isotrope, ni le temps uniforme. Ainsi, par exemple, l'étude du mouvement d'un corps par rapport au référentiel lié à un wagon en mouvement accéléré par rapport aux voies fera apparaître une direction privilégiée, celle de du vecteur accélération, soit un anisotropie de l'espace. Il en sera de même pour un référentiel lié un corps en mouvement de rotation autour d'un axe fera à la fois apparaître une direction privilégiée, celle de l'axe de rotation (anisotropie), mais aussi des effets "centrifuges" dépendant de la distance à l'axe (non-homogénéité de l'espace), voire du temps si la vitesse de rotation n'est pas constante (non-uniformité du temps).

Une telle situation conduirait à devoir écrire les équations de la Physique, et notamment celle de la mécanique, d'une façon distincte selon le référentiel d'étude, c'est-à-dire sous une forme non covariante, à moins de définir une classe de référentiels particuliers, dits galiléens, par rapport auxquels ces équations prennent justement une forme covariante.

Torseur dynamique d'entraînement-Torseur dynamique de Coriolis :

$$[D_e(S)]_{(O)} = \left[\underbrace{\int \vec{\gamma}_e(M)dm}_{\text{résultante}}, \underbrace{\int \overrightarrow{OM} \wedge \vec{\gamma}_e(M)dm}_{\text{moment } /O} \right]$$

$$[D_c(S)]_{(O)} = \left[\underbrace{\int \vec{\gamma}_c(M)dm}_{\text{résultante}}, \underbrace{\int \overrightarrow{OM} \wedge \vec{\gamma}_c(M)dm}_{\text{moment } /O} \right]$$

Les torseurs dynamiques d'entraînement et de Coriolis sont nuls dans les repères R_g animés d'un mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport à R_u : ces repères sont appelés **galiléens**. Dans la pratique, un référentiel lié à des corps réels ne peut être qu'approximativement, localement et momentanément galiléen.

Puissance d'un couple appliqué à un solide

Un couple est un torseur de forces dont la résultante est nulle. Son moment résultant est le même en tout point du solide. On le notera $\vec{\Gamma}$ avec $\vec{\Gamma} = \int_{(S)} \vec{C}_\tau(M)d\tau$.

La puissance du couple est $P(\vec{\Gamma}/R_0) = \vec{\Gamma}\cdot\vec{\Omega}(S/R_0)$

Le travail élémentaire du couple est $\delta W(\vec{\Gamma}/R_0) = P(\vec{\Gamma}/R_0)dt = \vec{\Gamma}\cdot\vec{\Omega}(S/R_0)dt$

Puissance d'un torseur de forces appliquées à un solide

Dans le cas d'un solide soumis à des forces ponctuelles et volumiques on a:

$$P(F\to S/R_0)=\sum_i \vec{f}(M_i)\cdot\vec{v}(M_i/R_0)+\int_S \vec{f}_\tau(M)\cdot\vec{v}(M/R_0)d\tau(M)$$

Soit A un point quelconque de (S)

$$P(F\to S/R_0)=\sum_i \vec{f}(M_i)\cdot\left[\vec{v}(A/R_0)+\vec{\Omega}(S/R_0)\wedge\overrightarrow{AM_i}\right]+\int_S \vec{f}_\tau(M)\cdot\left[\vec{v}(A/R_0)+\vec{\Omega}(S/R_0)\wedge\overrightarrow{AM}\right]d\tau(M)$$

$$P(F\to S/R_0)=\left[\sum_i \vec{f}(M_i)+\int_S \vec{f}_\tau(M)d\tau(M)\right]\cdot\vec{v}(A/R_0)+$$
$$\left[\sum_i \overrightarrow{AM_i}\wedge\vec{f}(M_i)+\int_S \overrightarrow{AM}\wedge\vec{f}_\tau(M)d\tau(M)\right]\cdot\vec{\Omega}(S/R_0)$$

$$P(F\to S/R_0)=\vec{R}(F\to S)\cdot\vec{v}(A/R_0)+\vec{M}(A,F\to S)\cdot\vec{\Omega}(S/R_0)$$

Théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{dm}{2}\left(\vec{v}(M/R_g)\right)^2\right]_{R_g} = P\left[\vec{f}(M/R_g)\right]$$

$$\boxed{\left.\frac{dE_c(S/R_g)}{dt}\right|_{R_g} = P\left(F_{ext} \rightarrow S/R_g\right)}$$

$$\frac{d}{dt}\left[E_c(S/R_g)+E_p\right]_{R_g} = \frac{d}{dt}\left[E_m(S/R_g)\right]_{R_g} = P\left(F_{extnc} \rightarrow S/R_g\right)$$

Mouvement dans un repère non galiléen :

$$\vec{\gamma}(M/R_g)dm = \vec{f}(M) = \vec{\gamma}(M/R_r)dm + \vec{\gamma}_e(M)dm + \vec{\gamma}_c(M)dm$$

$$\vec{\gamma}(M/R_r)\cdot\vec{v}(M/R_r)dm = \vec{f}(M)\cdot\vec{v}(M/R_r) - \underbrace{\vec{\gamma}_e(M)dm}_{=\vec{f}_{ie}(M)}\cdot\vec{v}(M/R_r) - \underbrace{\vec{\gamma}_c(M)\cdot\vec{v}(M/R_r)}_{=0}dm$$

$$\frac{d}{dt}\left[E_c(M/R_r)\right]_{R_r} = P\left[F_{ext}\rightarrow S/R_r\right] + P\left[F_{ie}\rightarrow S\right]$$

$$= \left[F_{ext}\rightarrow S\right]\cdot\left[V_r(S)\right] + \left[F_{ie}(S)\rightarrow S\right]\cdot\left[V_r(S)\right]$$

Chap VI: Liaisons-Forces de Liaison

Charles Coulomb : (1736-1806)

La loi de Coulomb en mécanique, nommée en l'honneur de Charles de Coulomb, exprime sous une forme très simplifiée l'intensité des forces de frottements qui s'exercent entre deux solides. Selon que ces solides glissent ou non l'un contre l'autre, on parle de glissement (frottement dynamique) ou d'adhérence (frottement statique). Dans les deux cas, les actions réciproques qui s'exercent entre ces solides comportent : une composante normale N qui les presse l'un contre l'autre, une composante tangentielle T qui s'oppose, ou tend à s'opposer, au glissement.

Objectifs :

- Comprendre la notion de liaisons ;
- Différencier entre liaisons unilatérales et liaisons bilatérales;
- Comprendre la notion de liaison holomone;
- Achever l'étude dynamique en applicant les lois de Coulomb.

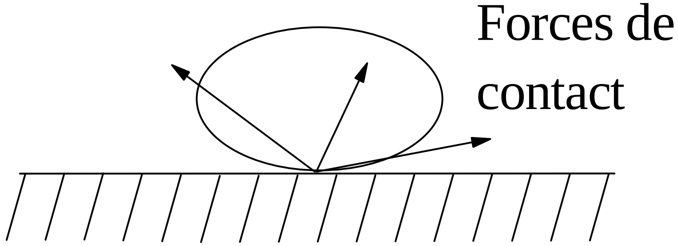
Introduction

Un mécanisme est l'association de plusieurs pièces liées entre elles par des contacts physiques qui les rendent totalement ou partiellement solidaires, selon qu'ils autorisent ou non des mouvements relatifs. La liaison mécanique est le modèle utilisé pour décrire cette relation dont la considération est primordiale dans l'étude des mécanismes. Elle emploie des représentations mathématiques qui diffèrent suivant qu'on l'aborde sous l'aspect cinématique (étude des mouvements ou guidages) ou sous l'aspect statique (étude de la transmission d'efforts).

La notion de liaison mécanique se définit plus généralement entre groupes de pièces, appelés classes d'équivalence contenant respectivement des pièces entièrement solidaires.

Actions de contact :

Définition :
Lorsqu'on étudie le mouvement d'un solide en contact avec un autre solide, on doit prendre en considération de nouvelles forces dites **forces de contact**.



Considérons un système matériel (S) constitué de p solides et de q points matériels. Si le système est entièrement libre (absence des forces de contact), la position d'un solide dans l'espace, par rapport à un repère R, est définie par 6 paramètres (x_G, y_G, z_G, ψ, θ , φ), celle d'un point matériel est définie par 3 paramètres (coordonnées du point).

Liaisons :

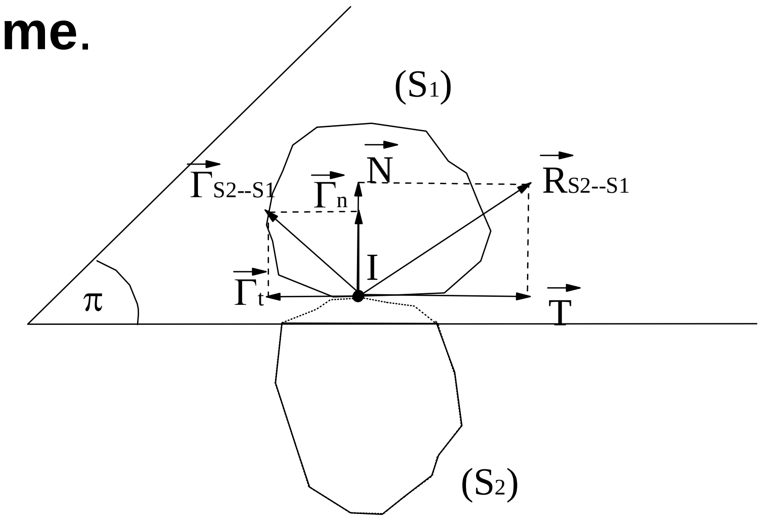
$$\begin{cases} m_{S_i}\vec{\gamma}(G_i) = \vec{R}_i \quad \text{(3 équations pour chaque i, } 1 \le i \le p) \\ \vec{\delta}(O, S_i) = \vec{M}(O, F \rightarrow S_i) \quad \text{(3 équations pour chaque i,} 1 \le i \le p) \end{cases}$$

$$\begin{cases} N \ge 0 \; ou \; \|\vec{T}\| \le f\|\vec{N}\| : \textit{Laisons unilatérales} \\ \vec{V}_g = \vec{0} : \textit{Laisons bilatérales} \end{cases}$$

Liaison holonome

Une liaison est dite **holonome** si la relation de cette liaison fait apparaître les paramètres de position (coordonnées et angles) sans faire apparaître leurs dérivées par rapport au temps. Si la relation de liaison contient des dérivées des paramètres par rapport au temps, la liaison sera dite **non holonome**.

$$[F_{S_1\to S_2}] = \begin{cases} \vec{R}_{S_1\to S_2} = -\vec{R}_{S_2\to S_1} \\ \vec{M}(I, \vec{R}_{S_1\to S_2}) = \vec{\Gamma}_{S_1\to S_2} = -\vec{\Gamma}_{S_2\to S_1} \end{cases}$$



Lois de Coulomb

Approche historique

Ces lois, largement empiriques, ont été introduites par Coulomb en 1871. Elles dépendent de l'état des surfaces en contact. Trop souvent considéré comme un élément perturbateur pour les calculs, on s'aperçoit très vite que le frottement est tout simplement indispensable : si les vis de fixation restent serrées, le clou en place, les échelles debout et les voitures sur la route, c'est grâce au frottement. C'est aussi sur ce phénomène que repose le fonctionnement des freins et embrayages.

Réaction normale :

a- Son sens: la réaction normale exercée par (S_2) sur (S_1) est dirigée vers l'intérieur de (S_1): c'est une force répulsive.
b- Sa norme: elle a une valeur arbitraire qui dépend du mouvement ou de l'équilibre et des actions qui s'exercent sur (S_1).

Réaction tangentiel :

Contact sans glissement : $\left\|\vec{T}\right\| \leq f_0 \left\|\vec{N}\right\|$

Contact avec glissement: $\left\|\vec{T}\right\| = f \left\|\vec{N}\right\|$

Puissance totale des actions de contact :

Les solides (S_1) et (S_2) sont en mouvement par rapport à R_0 et en contact pseudo-ponctuel entre eux. On étudie la puissance des actions de contact de (S_2) sur (S_1).

$$P(\vec{R}_{S2\to S1}/R_0) = \vec{R}_{S_2\to S_1}\cdot\vec{v}_g(S_1/S_2) + \vec{\Gamma}_{S_2\to S_1}\cdot\vec{\Omega}(S_1/S_2)$$

or $$\vec{R}_{S_2\to S_1}\cdot\vec{v}_g(S_1/S_2) = (\vec{T}+\vec{N})\cdot\vec{v}_g(S_1/S_2) = \vec{T}\cdot\vec{v}_g(S_1/S_2) \le 0$$

et $$\vec{\Gamma}_{S_2\to S_1}\cdot\vec{\Omega}(S_1/S_2) = \vec{\Gamma}_t\cdot\vec{\Omega}_t + \vec{\Gamma}_n\cdot\vec{\Omega}_n \le 0$$

Finalement: $P(F_{S2\to S1}) \le 0$

Si tous les coefficients de frottement sont nuls, i.e. $f = \mu = \lambda = 0 \Rightarrow$ $P(F_{S2\to S1}) = 0$.