MECANIQUE DU POINT MATERIEL

Chapitre VIII : Mécanique des Systèmes de points matériels

Pr. Fatima BOUYAHIA
1ère Année
Cycle Préparatoire

I- Introduction :

<u>Systèmes matériels</u>, :ensemble de points matériels.

Système $(\Sigma) = \{M_1, M_2, M_3, ...M_n\}$Union de n points matérielsM$_i$(masse m$_i$ et (x,y,z) : Il s'agit d'un système dit **<u>discret</u>**.

Dans un référentiel R(O,xyz)on définit M par : M(m,$\vec{v}$, $\vec{\gamma}$). D'où :

- la quantité de mouvement : $\vec{p}(M/R) = m\vec{v}(M/R)$
- le moment cinétique en O $\vec{\sigma}_o(M/R) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}(M/R)$
- l'énergie cinétique : $E_c(M/R) = \frac{1}{2}m\vec{v}^2(M/R)$

L'objectif est de définir ces grandeurs et d'autres pour un système de points matériels.

II- Masse et système matériel

1) Barycentre (ou centre d'inertie) :

Σ(n points matériels M$_i$(m$_i$), le **barycentre** (ou **centre d'inertie**) G est défini par :

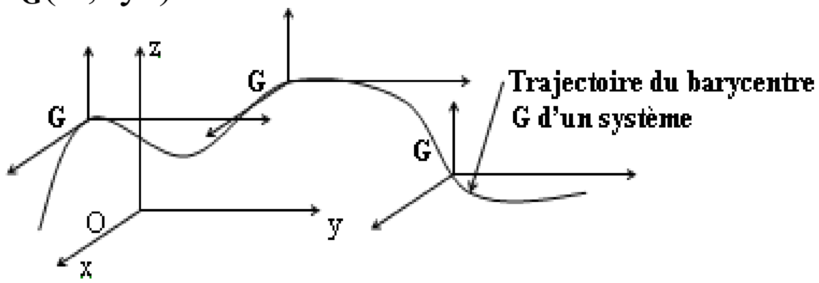
$$\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{OM_i} \text{ , soit } \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}$$

On note : $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$, nous obtenons :

$$x_G = \frac{1}{m}\sum_i m_i x_i$$
$$y_G = \frac{1}{m}\sum_i m_i y_i$$
$$z_G = \frac{1}{m}\sum_i m_i z_i$$

2) Référentiel barycentrique

On appelle **référentiel barycentrique** d'un système de points, le référentiel $\mathbf{R_G}$(G,xyz)dont les axes conservent les directions.



III- Cinétique d'un système de points matériels

1) Définition cinématique du barycentre

Dans le référentiel R(O,xyz), on a :

$$\vec{v}(G/R) = \frac{d\,\overrightarrow{OG}}{dt} = \frac{1}{m}\left[\sum_{i=1}^{n}(m_i \frac{d}{dt}\overrightarrow{OM_i})\right] = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}(m_i\,\overrightarrow{v}(M_i/R))$$

Ainsi nous avons :

$$m\vec{v}(G/R) = \sum_{i=1}^{n}(m_i\,\overrightarrow{v}(M_i/R)$$

De même : $m\vec{\gamma}(G/R) = \sum_i m_i\vec{\gamma}(M_i/R)$.

Ces deux relations donnent l'expression de la vitesse ou de l'accélération du centre d'inertie en fonction des vitesses ou des accélérations des différents points matériels.

2) Quantité de mouvement et moment cinétique

Soit R(O,xyz) le référentiel d'observation :

i/Quantité de mouvement du système Σ (constitué de n points matériels M_i de masse m_i) la quantité de mouvement totale de Σ, encore appelée ***résultante cinétique*** :

$$\vec{p}(\Sigma/R) = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}(M_i/R) \text{ qui donne } \vec{p}(\Sigma/R) = m\vec{v}(G/R)$$

ii/Moment cinétique au point A du système Σ, encore appelé ***moment cinétique résultant en A*** :

$$\vec{\sigma}_A(\Sigma / R) = \sum_i [\overrightarrow{AM_i} \wedge m_i \vec{v}(M_i / R).$$

Par rapport à O : $\vec{\sigma}_O(\Sigma / R) = \sum \overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{p}_i(M_i / R)$, d'où :

$$\vec{\sigma}_A(\Sigma / R) = \sum \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i \vec{v}(M_i / R) = \vec{\sigma}_O(\Sigma / R) + \overrightarrow{AO} \wedge \vec{p}(\Sigma / R)$$

3) Premier théorème de Koenig

$$\vec{\sigma}_O(\Sigma / R) = \sum \overrightarrow{OM_i} \wedge m_i \vec{v}(M_i / R)$$
$$= \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{v}(G / R) + \sum \overrightarrow{GM_i} \wedge m_i \vec{v}(M_i / R)$$

Comme $\vec{v}(M_i / R) = \vec{v}(G / R) + \vec{v}(M_i / R_G)$, alors :

$$\vec{\sigma}_O(\Sigma / R) = \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{v}(G / R) + \vec{\sigma}_G(\Sigma / R_G)$$

Le moment cinétique d'un système de points est égal à la somme du moment cinétique du centre d'inertie affecté de toute la masse du système et du moment cinétique du système par rapport au centre d'inertie G, évalué dans le référentiel barycentrique.

4) Energie cinétique

Par définition : $E_C(\Sigma / R) = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}^2(M_i / R)$.

5) Second théorème de Koenig

$$E_c(\Sigma / R) = E_c(\Sigma / R_G) + \frac{1}{2} m\vec{v}^2(G / R)$$

L'énergie cinétique d'un système de points est égale à la somme de l'énergie cinétique du centre d'inertie affecté de toute la masse du système et de l'énergie cinétique du système correspondant à son mouvement dans le référentiel barycentrique.

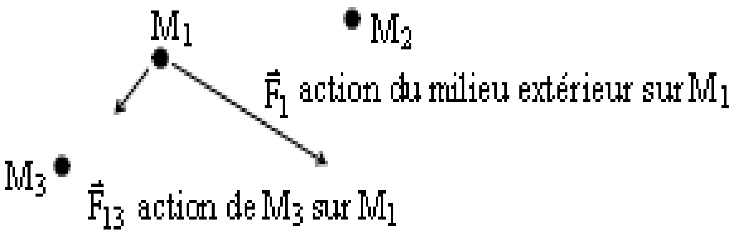
III- Théorèmes généraux de la mécanique pour les systèmes de points

1) Actions mécaniques intérieures et extérieures

Système= ensemble de n points matériels $M_i(m_i)$

Actions mécaniques intérieures (ou **forces intérieures**) : c'est l'ensemble des forces d'interaction entre les points du système.

$\vec{F}_{ij}$: La force que le point M_j exerce sur le point M_i ;
$\vec{F}_i$: La force que le milieu extérieur au système exerce sur le point M_i.
$\vec{F}_{ij}$ **:Forces intérieures et** $\vec{F}_i$ **: forces extérieures** au système.



Les lois de Newton appliquées au point M_i en mouvement dans un référentiel galiléen R(O,xyz) permettent d'écrire :

- **Principe des actions réciproques** : $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ et $\overrightarrow{M_iM_j} \wedge \vec{F}_{ij} = \vec{0}$

- **Loi fondamentales de la dynamique** : $m\vec{\gamma}(M_i / R) = \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i$

Dans le cas d'un référentiel **non galiléen**, il faut tenir compte des forces d'inerties d'entraînement et de coriolis.

2) Résultante et moment des forces intérieures

Il est évident que la résultante des forces intérieures est nulle : $\vec{F}_{int} = \sum_i \sum_j \vec{F}_{ij} = \vec{0}$ car $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$, et que ***le moment résultant en G*** de ces forces est nul également :

$$\sum_{i,j} \vec{M}_G(\vec{F}_{ij}) = \vec{0}, \text{ car } \sum_i m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}.$$

3) Résultante et moment des forces extérieures

Chaque point M_i du système est soumis de la part du milieu extérieur à une force $\vec{F}_i$ detelle sorte que la résultante s'écrit : $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$. Le moment résultant en O de ces forces s'écrit :

$$\sum_i \vec{M}_O(\vec{F}_i) = \sum_i \overrightarrow{OM}_i \wedge \vec{F}_i \,.$$

Le moment en un point A vérifie la relation fondamentale des moment, et on a :

$$\sum_i \vec{M}_A(\vec{F}_i) = \sum_i \vec{M}_O(\vec{F}_i) + \sum_i \overrightarrow{AO} \wedge \vec{F}_i$$

$$\Rightarrow \quad \sum_i \vec{M}_A(\vec{F}_i) = \sum_i \vec{M}_O(\vec{F}_i) + \overrightarrow{AO} \wedge \vec{F}$$

4) Théorèmes du centre d'inertie et du moment cinétique

Système =$\Sigma(M_i(m_i), G)$ et $\vec{P}(\Sigma / R)$ sa résultante cinétique.

$$\frac{d\vec{P}(\Sigma / R)}{dt} = \vec{F}, \quad \text{soit} \quad \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d^2 \overrightarrow{OG}}{dt^2} = \vec{F}$$

Sous la première forme, il s'agit du **théorème de la résultante cinétique** ; sous la seconde, on l'appelle **théorème du centre d'inertie**.

$$\frac{d\vec{\sigma}_O(\Sigma / R)}{dt} = \sum_i \vec{M}_O(\vec{F}_i)$$

Pour un système Σ la dérivée par rapport au temps du moment cinétique en O est égale au moment en O des forces extérieures : c'est le théorème du moment cinétique.

Dans le référentiel barycentrique, $R_G(G,xyz)$, le théorème du moment cinétique est valable en G dans ce référentiel qu'il soit galiléen ou non sans que l'on ait à tenir compte des forces d'inertie, on a : $\boxed{\frac{d\vec{\sigma}_G(\Sigma / R_G)}{dt} = \sum_i \vec{M}_G(\vec{F}_i) = \sum_i \overrightarrow{GM}_i \wedge m_i \vec{\gamma}(M_i / R_G)}$.

5) Théorème de l'énergie cinétique

Dans un référentiel galiléen, chaque point M_i est soumis à une résultante des forces extérieures $\vec{F}_i$ et à n-1 forces intérieures $\vec{F}_{ij}$ que tous les autres points M_j exercent sur lui ; le travail élémentaire de ces forces s'écrit : $dW(M_i) = (\vec{F}_i + \sum_j \vec{F}_{ij}).\vec{v}(M_i / R)dt$. C'est la somme des travaux des forces extérieures et des forces intérieures au système Σ. En sommant sur tous les points, on démontre alors que :

$$dE_c(\Sigma / R) = dW_{ext} + dW_{int}$$

$$E_C(\Sigma / R) = \frac{1}{2}\sum_i m_i \vec{v}^2(M_i / R)$$

$$\frac{dE_C(\Sigma / R)}{dt} = \sum_i m_i \vec{\gamma}(M_i / R).\vec{v}(M_i / R)$$

La somme des travaux des forces intérieures n'est pas toujours nulle.

En terme de puissance : $P_{ext} + P_{int} = \dfrac{dE_c(\Sigma / R)}{dt}$

IV- Energie mécanique

Soit Σ un système de points matériels (M_i,m_i) repéré par $\vec{r}_i = \overrightarrow{OM}_i$
Et soit R(O,xyz)un référentiel galiléen, on a :

$$dW = dW_{int} + dW_{ext} = dE_c(\Sigma / R)$$

Lesforces s'exerçant surΣ sont :

- forces conservativesdont le travail dérive d'une énergie potentielle $dW_c = -dE_p$,
- forces non conservatives dont le travail élémentaire est noté : dW_{nc}

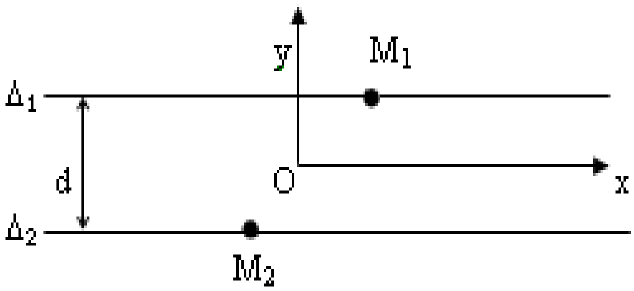
Le théorème de l'énergie cinétique prend la forme :

$$dW_c + dW_{nc} = dE_c \text{ soit } dW_{nc} = dE_p + dE_c = dE_m$$

Par définition, $E_m = E_p + E_c$.

Dans le cas où toutes les forces appliquées à Σ dérivent d'une énergie potentielle : $dW_{nc}=0$, alors $dE_m=0$ c'est-à-dire que l'énergie mécanique, E_m, est constante, c'est l'**intégrale première de l'énergie**.

<u>Exemple :</u> Deux points matériels M_1 et M_2 de même masse m se déplacent sur deux droites parallèles Δ_1 et Δ_2 distantes de d. Les lois horaires respectives sont : $x_1(t)=\lambda t^3$ et $x_2(t)=-\lambda t^3$, où λ est une constante réelle positive. Déterminer les caractéristiques cinétiques du système et montrer que le moment cinétique se conserve.



Position dans R(O,xyz) : $\overrightarrow{OM_1}=x_1\vec{i}+\frac{d}{2}\vec{j}$ et $\overrightarrow{OM_2}=x_2\vec{i}-\frac{d}{2}\vec{j}$

Vitesse dans R(O,xyz) : $\vec{v}(M_1/R)=3\lambda t^2\vec{i}$ et $\vec{v}(M_2/R)=-3\lambda t^2\vec{i}$

Accélération R(O,xyz) : $\vec{\gamma}(M_1/R)=6\lambda t\vec{i}$ et $\vec{\gamma}(M_2/R)=-6\lambda t\vec{i}$

La résultante cinétique et le moment cinétique :

- $\vec{p}(\Sigma/R)=6m\lambda t\vec{i}-6m\lambda t\vec{i}=\vec{0}$, G est à tout instant confondu en O
- $\vec{\sigma}_O(\Sigma/R)=-3md\lambda t^2\vec{k}$

V- Résultante dynamique et moment dynamique

1) Définitions :

a) On appelle **résultante dynamique** la quantité $\vec{D}(\Sigma/R)=m\vec{\gamma}(G/R)=\sum m_i\vec{\gamma}(M_i/R)$, où les $m_i\vec{\gamma}(M_i/R)$ sont appelées des **quantité d'accélérations**.

On peut vérifier que : $\vec{D}(\Sigma/R)=\dfrac{d\vec{p}(\Sigma/R)}{dt}$

b) On appelle **moment dynamique en O** d'un système Σ en mouvement dans R, la quantité : $\vec{\delta}_O(\Sigma / R) = \sum_i \overrightarrow{OM_i} \wedge m_i \vec{\gamma}(M_i / R)$, c'est le moment résultant des quantités d'accélération.

2) Relation entre moment cinétique et moment dynamique

Par définition : $\vec{\sigma}_A(\Sigma / R) = \sum_i \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i \vec{v}(M_i / R)$, en dérivant par rapport au temps, on obtient la relation suivante : $\vec{\delta}_A(\Sigma / R) = \dfrac{d\vec{\sigma}_A(\Sigma / R)}{dt} + m\vec{v}(A / R) \wedge \vec{v}(G / R)$.

On général le moment dynamique n'est pas égal à la dérivé par rapport au temps du moment cinétique ; il y a égalité uniquement si : A=G, A est fixé dans R ou $\vec{v}(A / R) // \vec{v}(G / R)$.