MECANIQUE DU POINT MATERIEL

Chapitre V : Dynamique du point matériel
Théorèmes généraux

Pr. Fatima BOUYAHIA
1ère Année
Cycle Préparatoire

V.1 Introduction
V.2 Quantité de mouvement et moment cinétique
V.3 Théorèmes de la quantité de mouvement et du moment cinétique
V.4 Conservation de la quantité de mouvement et du moment cinétique
V.5 Energie potentielle d'un point matériel
V.6 Energie cinétique d'un point matériel
V.7 Energie mécanique d'un point matériel, Em

V.1 Introduction

La loi fondamentale de la dynamique suffit à déterminer les mouvements d'un point matériel de conditions initiales arbitraires.

Compléments :

1. de fournir parfois plus adéquatement les équations du mouvement ;
2. de faciliter l'élimination de la force de liaison ;
3. de fournir le cas échéant des intégrales premières.

Définition :

Intégrale première = équation du type $f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = 0$

Introduction de deux théorèmes pour définir deux grandeurs fondamentales : la ***quantité de mouvement*** et le ***moment cinétique***.

V.2 Quantité de mouvement et moment cinétique

Définitions :

Soit $\vec{v}(M/R)$ la vitesse de M dans R(O,xyz).

- *Quantité de mouvement de M* : $\vec{p}(M/R) = m\vec{v}(M/R)$
- *Moment cinétique de M en A* la grandeur vectorielle :

$$\vec{\sigma}_A(M/R) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{p}(M/R) = m\,\overrightarrow{AM} \wedge \vec{v}(M/R).$$

Analytiquement si A=O, origine du référentiel R, on a :

$$\vec{p}(M/R) = m(\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k})$$

$$\vec{\sigma}_O(M/R) = m[(\dot{y}z - \dot{z}y)\vec{i} - (\dot{x}z - \dot{z}x)\vec{j} + (\dot{x}y - \dot{y}x)\vec{k}]$$

Cas d'un point matériel en mouvement dans le plan z=0 ; on a :

$$\vec{v}\,(M/R) = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi \text{ et}$$

$$\vec{\sigma}_O(M/R) = \rho\vec{e}_\rho \wedge m\,(\dot{r}\,\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi) = m\,\rho^2\,\dot{\varphi}\,\vec{k}$$

Ainsi le moment cinétique est d'autant plus grand que la rotation du point autour de Oz est rapide et que le point est plus éloigné de cet axe

V.3 Théorèmes de la quantité de mouvement et du moment cinétique

Soit M de masse m en mouvement dans R(O,xyz) **galiléen**.

$$\vec{p}(M/R) = m\vec{v}(M/R) \text{ et } \frac{d\vec{p}(M/R)}{dt} = m\frac{d\vec{v}(M/R)}{dt} \text{ donnent :}$$

$$\frac{d\vec{p}(M/R)}{dt} = \vec{F}$$

***Rappel** :Le moment en O d'une force* $\vec{f}$ appliquée en un point M est la quantité vecteur axiale, mesurée en newton – mètre (N.m), qui est définie à partir de la force par : $\vec{M}_O(\vec{f}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}$.

Remarque :

Le moment cinétique en O n'est autre que le moment en O du vecteur quantité de mouvement.

Le théorème du moment cinétique s'écrit : $\dfrac{d\vec{\sigma}_O(M/R)}{dt} = \vec{M}_O(\vec{F})$ où $\vec{F}$ est la résultante des forces appliquées au point matériel.

Preuve : $\dfrac{d\vec{\sigma}_O(M/R)}{dt} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge \vec{p}(M/R) + \overrightarrow{OM} \wedge \dfrac{d\vec{p}(M/R)}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$

V.4 Conservation de la quantité de mouvement et du moment cinétique

Un point matériel est dit isolé ou libre s'il ne subit aucune interaction. Il est alors soumis à une force nulle. Dans ces conditions on obtient que :

La quantité de mouvement est constante, $\vec{p} = \overrightarrow{cte}$;

Le moment cinétique en O est constant, $\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{cte}$.

Conclusion :

Dans un référentiel galiléen, la quantité de mouvement et le moment cinétique en un point fixe, O par exemple, restent constants pour tout point matériel isolé ou soumis à des forces dont la résultante est nulle : **loi de Newton**.

1° Energie d'un point matériel

1° Introduction

On dit qu'un système possède de l'énergie s'il peut fournir du travail.
Considérons un point matériel M de masse m. Le mouvement de ce point matériel M est décrit dans le référentiel R(O,xyz) par le rayon vecteur $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ et sa vitesse $\vec{v}(M/R)$. Le point est de plus soumis à l'action d'une force $\vec{F}$ connue à chaque instant lors du mouvement.

Définitions :

(1) Un point matériel M **possède de l'énergie potentielle** si du travail peut être fourni par modification de sa position.
(2) Un point matériel M **possède de l'énergie cinétique** si du travail peut être fourni par modification de sa vitesse.

2° Travail d'une force le long d'un trajet

Considérons M(m, $\vec{F}$) dans un référentiel R quelconque.

Le travail élémentaire de la force $\vec{F}$:

$$\delta W = \vec{F}.d\vec{r} = \vec{F}.\vec{v}(M/R)dt \text{, avec } d\vec{r} = d\vec{M} = \vec{v}(M/R)dt$$

C'est une grandeur scalaire dont l'**unité** en SI est le joule (J), équivalent de Newton.mètre (N.m).

Sommation des travaux élémentaires δW donne:

$$W_{12} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}.d\vec{M} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}.\vec{v}(M/R)dt$$

3° Puissance d'une force à un instant donné

La puissance – à un instant t – d'une force $\vec{F}$ s'exerçant en un point M correspond, dans R, à la quantité :

$$P = \frac{\delta W}{dt} = \vec{F}.\vec{v}(M/R)$$

L'unité de la puissance est le watt (w) homogène au produit d'une force par une vitesse.

4° Forces conservatives

Définition :

Le travail d'une force $\vec{F}$ entre deux instant t_1 et t_2 donnés est a priori fonction du chemin suivi par le point M entre ces deux instants. On dira de la force $\vec{F}$ qu'elle est **consevative** si son travail est indépendant du chemin suivi ; il ne dépend que de la position de départ et la position d'arrivée.

Sur un parcours fermé C : **W(forces conservatives)=0** ; d'où,

$$\forall C_{(\text{fermé})}, \quad W = \oint_C \vec{F}.d\vec{M} = 0.$$

Définition :

On appelle **champ de force**, $\vec{F}(r)$, l'ensemble des forces $\vec{F}(M)$ définit en tous les points d'un domaine de l'espace.

Propriété :

Un champ de force, $\vec{F}(r)$, est consevatif si le travail de la force $\vec{F}(M)$ est nul pour tout parcours fermé effectué dans ce champ.

Travail du poids

Dans le référentiel terrestre R(O,xyz), dont Oz est l'axe vertical ascendant, un point M(m) se déplace dans le champ de pesanteur. Le poids est une force verticale dirigés vers le bas, on a : $\vec{F} = \vec{P} = -mg\vec{k}$, comme $d\vec{M} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$, on a : $\delta W = \vec{F}.d\vec{M} = -mgdz$.

On pose E_p=mgz, alors dE_p=mgdz, donc $\delta W=-dE_p$: le travail élémentaire est l'opposé de la différentielle dE_p.

Le travail pour un déplacement entre deux points M_1 et M_2 est :

$$W = mg\,(z_1 - z_2).$$

Dans le champ de pesanteur uniforme (g=cte), le poids a un caractère conservatif.

- $W = 0$ pour $z_1 = z_2$: parcours fermé dans le champ de pesanteur ;
- Le travail reçu (W>0) à la descente est entièrement compensé par le travail qu'il faut fournir pour remonter.

Remarque : les forces de frottement sont non conservatives.

V.5 Energie potentielle d'un point matériel

Soit un point matériel M de masse m qui se déplace dans un champ de force $\vec{F}(r)$ permanent (c'est-à-dire indépendant du temps).

On dit qu'un champ de force permanent $\vec{F}(r)$ **dérive d'une énergie potentielle E_p** s'il existe une fonction $E_p(r)=E_p(xyz)$ de la position telle que le travail $\delta W = \vec{F}.d\vec{r} = -dE_p$ pour tout déplacement élémentaire $d\vec{r}$ (dx,dy,dz).

Soit pour tout déplacement fini entre M_1 et M_2, le travail

$$W_1^2 = E_p(M_1) - E_p(M_2)$$

Ce travail ne dépend que du point de départ et du point d'arrivée, et pas du chemin suivi :

‘‘Une force qui dérive d'une énergie potentielle est consevative’’.

Dans le cas d'une force $\vec{F'}$ non conservative le travail élémentaire δW ne peut pas s'exprimer à partir d'une différentielle dE_p.

La fonction énergie potentielle est définie à une constante additive près.

1° Energie potentielle de quelques champs de forces

- Dans le champ de pesanteur uniforme $\vec{g} = g\vec{k}$: E_p = mgz + cte (Oz axe vertical ascendant).
- Point de masse m à l'extrémité d'un ressort de raideur k, et dont l'autre extrémité est fixée : $E_p = \frac{1}{2}kr^2$ où r est le **déplacement linéaire** de la masse m.
- Champ électrostatique $\vec{E}(M)$ ayant pour source une charge Q fixe à l'origine O du système de coordonnées, avec $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}$. Une charge ponctuelle q subit une force $\vec{F} = q\vec{E}$ qui dérive de l'énergie potentielle

$$E_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r} + cte$$

- Champ gravitationnel d'un point (ou objet) matériel de masse m_0 : $E_p = -G\frac{mm_0}{r} + cte$

Expression d'un champ de force conservatif à partir del'énergie potentielle dont il dérive

Par définition, $\delta W = -\,dE_p$, or $\delta W = \vec{F}.d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$, d'où

$$dE_p = -[F_x dx + F_y dy + F_z dz]$$

Par ailleurs, la différentielle de E_p s'écrit :

$$dE_p = \frac{\partial E_p}{\partial x}dx + \frac{\partial E_p}{\partial y}dy + \frac{\partial E_p}{\partial z}dz.$$

Par identification on obtient les coordonnées cartésiennes de la force $\vec{F}$ en fonction de E_p, soit : $F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}$; $F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}$; $F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$.

Par définition du gradient, on a : $\vec{F} = -\vec{\nabla}E_p$ ou $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\,E_p$

<u>Conséquences :</u>

(1) Un point M_0 où l'énergie potentielle $E_p(M)$ d'un champ de force est minimum est une position **d'équilibre stable ;**

(2) A un maximum de l'énergie potentielle correspond une position **d'équilibre instable.**

V.6 Energie cinétique d'un point matériel

1° Définition

M(m) dans un référentiel R(O,xyz) ; par définition, **l'énergie cinétique** de ce point est, à l'instant t et dans R :

$$E_c(M/R) = \frac{1}{2} m\vec{v}^2(M/R)$$

Cette grandeur **scalaire** est essentiellement **positive** (ou nulle) et s'exprime en joules (**J**).

2° Théorème de l'énergie cinétique pour un point matériel

Le PFD dans R galiléen donne $\vec{F} = m\dfrac{d\vec{v}(M/R)}{dt}$

où $\vec{F}$ est la résultante de toutes les forces s'exerçant sur le point M.

D'où : $\vec{F}.\vec{v}(M/R) = m\dfrac{d\vec{v}(M/R)}{dt}.\vec{v}(M/R) = \dfrac{d}{dt}[\dfrac{1}{2}m\vec{v}^2(M/R)]$

$\vec{F}.\vec{v}(M/R)$: puissance des actions appliquées au point M.

théorème de l'énergie cinétique :

> **A l'instant t et dans un référentiel galiléen R, la puissance des efforts appliqués à un point matériel M de masse m est égale à la dérivée de son énergie cinétique :**

$$P = \frac{dE_c(M/R)}{dt} = \frac{d}{dt}[\frac{1}{2}m\vec{v}^2(M/R)]$$

Comme $P = \dfrac{\delta W}{dt}$, alors $\delta W = dE_c$; et entre deux instants t_1 et t_2, nous écrirons : $W_{1->2} = E_{c2} - E_{c1}$.

Théorème de l'énergie cinétique en terme de travaux :

> **Entre deux instant t_1 et t_2, et dans un référentiel galiléen, la somme des travaux des forces appliquées au point M est égale à la variation de l'énergie cinétique de ce point matériel.**

V.7 Energie mécanique d'un point matériel, Em

Pour un point matériel M(m) mobile dans un référentiel galiléen R, l'expression du théorème de l'énergie cinétique peut s'écrire sous la forme :

$$E_{c2} - E_{c1} = E_{p1} - E_{p2} + W_{nc}$$

où E_{p1}-E_{p2} est la variation de l'énergie potentielle du point M dans son mouvement, et, W_{nc} est la somme des travaux de toutes les *forces non conservatives* appliquées à M.

Définition : E_m=E_c+E_p, somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle d'un système, **E_m est appelée énergie mécanique**

Avec cette définition on tire que pour tout point M(m) :

$$\Delta E_m = E_{m2} - E_{m1} = W_{nc}$$

Conséquences :

(1) La variation de l'énergie mécanique, ΔE_m, d'un point matériel est égale au travail des forces non conservatives, W_{nc}, qui s'exercent sur lui.

(2) Pour $W_{nc}=0$, la quantité E_m se conserve au court du temps : *Dans un champ de force conservatif, l'énergie mécanique d'un point matériel se conserve au cours du temps* : $\mathbf{E_m=constante}$.

(3) Pour un système conservatif, l'équation qui traduit la conservation de l'énergie mécanique $E_m=E_c+E_p$=constante est une relation qui peut s'écrire sous la forme : $f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0$: cette relation est dite **I**ntégrale **P**remière de l'énergie mécanique.

En effet, l'énergie potentielle ne dépend que de la position et l'énergie cinétique ne dépend que de la vitesse ; Seuls les paramètres de position, (x,y,z) et leurs dérivées premières apparaissent dans l'intégrale première.