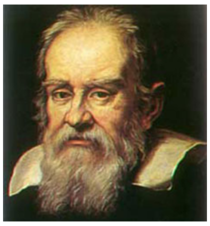
MÉCANIQUE DU POINT MATÉRIEL

Chapitre III : Cinématique - Changement de repère
Composition du mouvement

Pr. Fatima BOUYAHIA
1ère Année
Cycle Préparatoire

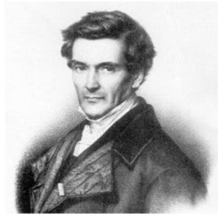
III.1 Introduction



Galilée
Galileo Galilei
Physicien et
Astronome italien
1564-1642

Nous nous proposons d'établir le lien entre les mouvements d'un même point matériel dans deux repères distincts $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, eux même en mouvement relatif l'un par rapport à l'autre.

C'est **Galilée** qui avait entretenu dans un premier temps la relation entre les vitesses d'une même particule dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$,. Les relations précises et générales sur les vecteurs-vitesses et les vecteurs-accélérations ont été déduites par Coriolis en 1836.

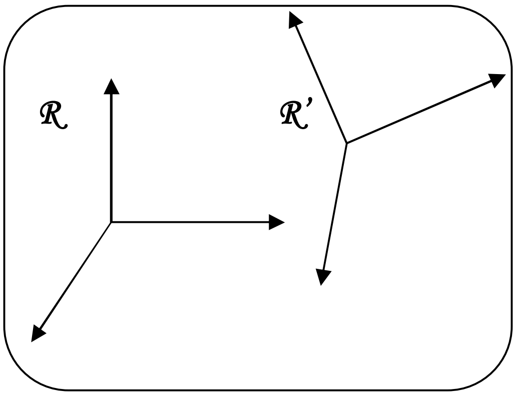


Gustave-Gaspard
de Coriolis
Mathématicien
Français
1792-1843

III.2 Mouvement relatif de deux repères $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$

III .2.1 Position du problème

Soient deux repères $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ auxquels on associe respectivement les référentiels $\mathcal{R}(O, x, y, z)$ et $\mathcal{R}'(O', x', y', z')$. Pour déterminer le mouvement de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$, il va falloir déterminer à tout instant la position dans $\mathcal{R}$ de tout lié à $\mathcal{R}'$.



Dans $\mathcal{R}'$:

$$\overrightarrow{o'M'} = x'\vec{e'}_x + y'\vec{e'}_y + z'\vec{e'}_z$$

On suppose dans cette démarche que les composantes x', y' et z' sont constantes.

III.2.2 Vecteur-vitesse instantané de rotation

Trouvons la vitesse :

$$\left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right/_R = \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right/_R + x'\left.\frac{d\vec{e'}_x}{dt}\right/_R + y'\left.\frac{d\vec{e'}_y}{dt}\right/_R + z'\left.\frac{d\vec{e'}_z}{dt}\right/_R$$

?? =

$\vec{e'}_x$, $\vec{e'}_y$ et $\vec{e'}_z$ sont unitaires et orthogonaux entre eux.

Nous allons exploiter ces deux caractéristiques.

$\vec{e'}_x, \vec{e'}_y$ et $\vec{e'}_z$ **sont unitaires** $\Rightarrow$

$$\overrightarrow{e'_x} \perp \left.\frac{d\overrightarrow{e'_x}}{dt}\right/_R , \quad \overrightarrow{e'_y} \perp \left.\frac{d\overrightarrow{e'_y}}{dt}\right/_R \quad et \quad \overrightarrow{e'_z} \perp \left.\frac{d\overrightarrow{e'_z}}{dt}\right/_R$$

En supposant que : $\frac{d\overrightarrow{e'_x}}{dt} = \overrightarrow{\Omega'_x} \Lambda \overrightarrow{e'_x}$

Avec $\overrightarrow{\Omega'_x}$ un nouveau vecteur de composantes $\overrightarrow{\Omega'_x}\begin{vmatrix}\Omega'_{xx}\\ \Omega'_{xy}\\ \Omega'_{xz}\end{vmatrix}$.

On déduit que :

$$\frac{d\overrightarrow{e'_x}}{dt} = \Omega'_{xz}\,\vec{e'}_y - \Omega'_{xy}\,\vec{e'}_z$$

Et par analogie :

$$\frac{d\overrightarrow{e'_y}}{dt} = \Omega'_{yx}\,\vec{e'}_z - \Omega'_{yz}\,\vec{e'}_y$$

$$\frac{d\overrightarrow{e'_z}}{dt} = \Omega'_{zz}\,\vec{e'}_x - \Omega'_{zy}\,\vec{e'}_y$$

Remarque :

les composantes $\Omega'_{xx}, \Omega'_{yy}$ et Ω'_{zz}

………………………………………………………………………………………………………
………………………..…………………………………………………………………………….

$\vec{e'}_x, \vec{e'}_y$ et $\vec{e'}_z$ **sont orthogonaux entre eux** $\Rightarrow$

$$\frac{d}{dt}(\vec{e'}_x . \vec{e'}_y) = \text{…………………………………………………………………}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{e'}_x . \vec{e'}_y) = \text{…………………………………………………………………}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{e'}_x . \vec{e'}_y) = \text{…………………………………………………………………}$$

On pose : $\left|\begin{array}{l}\Omega'_x = \Omega'_{zx} = \Omega'_{yx}\\ \Omega'_y = \Omega'_{xy} = \Omega'_{zy}\\ \Omega'_z = \Omega'_{yz} = \Omega'_{xz}\end{array}\right.$ $\Bigg\}$ Par analogie

Etant donnée l'indétermination des composantes $\Omega'_{xx}, \Omega'_{yy}$ et Ω'_{zz} elles peuvent prendre des valeurs quelconques. On écrit :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\Omega'_x} = \Omega'_x \, \vec{e'}_x + \Omega'_y \, \vec{e'}_y + \Omega'_z \, \vec{e'}_z \\ \overrightarrow{\Omega'_y} = \Omega'_x \, \vec{e'}_x + \Omega'_y \, \vec{e'}_y + \Omega'_z \, \vec{e'}_z \\ \overrightarrow{\Omega'_z} = \Omega'_x \, \vec{e'}_x + \Omega'_y \, \vec{e'}_y + \Omega'_z \, \vec{e'}_z \end{cases}$$

Il est donc possible de trouver un seul vecteur $\vec{\Omega}\, {R'}/_{R}$ tel que :

$$\frac{d\overrightarrow{e'_x}}{dt} = \vec{\Omega}\, {R'}/_{R} \wedge \overrightarrow{e'_x}$$

$$\frac{d\overrightarrow{e'_y}}{dt} = \vec{\Omega}\, {R'}/_{R} \wedge \overrightarrow{e'_y}$$

$$\frac{d\overrightarrow{e'_z}}{dt} = \vec{\Omega}\, {R'}/_{R} \wedge \overrightarrow{e'_z}$$

Ce vecteur caractérise la vitesse de rotation des axes de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$. Il est appelé vecteur-vitesse instantané de rotation de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$.

Application :

On considère le repère relatif $\mathcal{R}'$ de coordonnées cylindriques. Déterminons $\vec{\Omega}\, {R'}/_{R}$; $\mathcal{R}$ étant le repère cartésien.

III.3 Loi de composition des vecteurs-vitesse

La vitesse dans $\mathcal{R}$ est donnée par :

$$\left.\frac{d\overrightarrow{O'M'}}{dt}\right/_{R} = \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right/_{R} +' \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right/_{R}$$

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………

$$\vec{V}_a\Big/_{R} = \vec{V}(O')\Big/_{R} + \vec{\Omega}_{R'}\Big/_{R} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{V}_r\Big/_{R'}$$

=

=

Soit la loi de composition des vecteurs-vitesses donnée par :

$$\vec{V}_a\Big/_{R} = \vec{V}_e\Big/_{R} + \vec{V}_r\Big/_{R'}$$

La vitesse d'entraînement $\vec{V}_e$ représenta la vitesse de M dans $\mathcal{R}$ en considérant que M est fixe dans $\mathcal{R}'$. Il se compose d'une translation et d'une rotation.

III.4 Loi de composition des vecteurs-accélération

L'accélération dans $\mathcal{R}$ est donnée par :

$$\left.\frac{d\vec{V}_a}{dt}\right/_R = \left.\frac{d\vec{V}_r}{dt}\right/_R + \left.\frac{d\vec{V}_e}{dt}\right/_R$$

Donc :

…………………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Soit la loi de composition des vecteurs - accélérations donnée par :

$$\vec{\Gamma}_a\Big/_R = \vec{\Gamma}_r\Big/_R + \vec{\Gamma}_e\Big/_{R'} + \vec{\Gamma}_c\Big/_{R'}$$

III.5 A retenir

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………