MECANIQUE DU POINT MATERIEL

Chapitre II : Cinématique du point matériel

Système de coordonnées

Pr. Fatima BOUYAHIA
1ère Année
Cycle Préparatoire

II.1 Introduction

1) La cinématique = branche de la mécanique

- Notions de **Repère**, de **Vitesse, d'Accélération, Trajectoire**, etc.
- Pas de masse ni de force
- Les grandeurs fondamentales sont : la longueur et le temps.

2) Espace, temps et référentiel :

- L'**espace** physique est en mécanique classique assimilé à un espace euclidien de dimension trois.
- Le **temps** est un concept lié à la notion d'évolution.
- Le **référentiel** = repère d'espace muni d'une horloge.

II-2Systèmes usuels de coordonnées

1)Coordonnées Cartésiennes

Soit M un point matériel en mouvement R(O,xyz).
M(t) la position du point mobile à l'instant t.

$\overrightarrow{OM}$ noté aussi $\overrightarrow{M}$ est le **vecteur position** de M dans R(O,xyz).

Trajectoire = ensemble des positions occupées par M au cours du temps dans l'espace ; c'est la courbe décrite par le point M dans son mouvement.

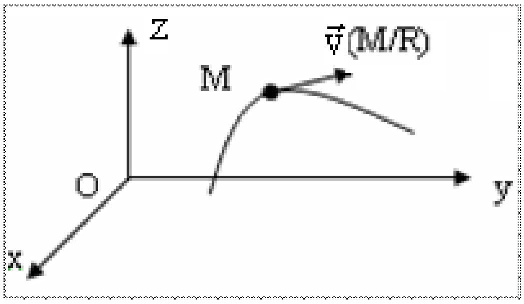
1 /La vitesse du point M en coordonnées cartésiennes

Par définition :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad \Rightarrow$$

$$\vec{v}(M/R) = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

$$\text{et } \vec{\gamma}(M/R) = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$



- La vitesse est **portée par la tangente** à la trajectoire du mouvement au point M(t).
- La norme de la vitesse, est la **vitesse scalaire**, notée v tel que ; $v = \|\vec{v}(M/R)\| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$.

- Le **déplacement élémentaire** est donné par :

$$d\overrightarrow{OM} = \vec{v}(M/R)dt = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}.$$

- **Equation d'évolution** (ou **équation horaire**) : c'est la relation qui, à tout instant, lie la position du point matériel M au temps t.
- L'**abscisse curviligne** s(t) est la mesure algébrique de l'arc $\widehat{MM'}$ de la courbe, il est compté positivement dans le sens du parcours : $s(t) = \widehat{MM'}$.
- **L'arc élémentaire** est noté ds.
- La loi s(t) définit ainsi l'**équation horaire du mouvement**.
- En coordonnées cartésiennes, on a :

$$ds = \left\| d\overrightarrow{OM} \right\| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

d'où on a : $v = \dfrac{ds}{dt} = \left\| \vec{v}(M/R) \right\|$

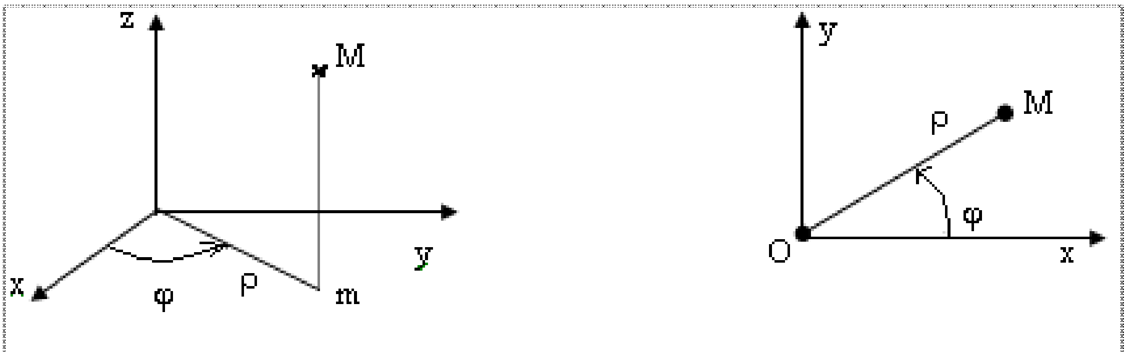
2)Coordonnées cylindriques

Vitesse et accélération dans les systèmes cylindrique

$$\overrightarrow{OM} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{k} \quad ; \qquad \vec{v}(M/R) = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{k}$$

$$\vec{\gamma}(M/R) = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{k}$$

Expressions dans la base locale des coordonnées cylindriques.



Coordonnées cylindriques (ρ , φ ,z)

Coordonnées polaires (ρ,φ)

En coordonnées polaires, (ρ,φ), le vecteur position, la vitesse et l'accélération sont :

$$\overrightarrow{OM} = \rho\vec{e}_\rho \qquad \vec{v}(M/R) = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{\gamma}(M/R) = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi$$

3)Coordonnées sphériques

Vitesse et accélération dans les systèmes shphérique

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r \ ;$$

$$\vec{v}(M/R) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{\gamma}(M/R) = [\ddot{r} - r(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta)]\vec{e}_r + [2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta)\vec{e}_\theta$$
$$+ [r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + r\ddot{\varphi}\sin\theta]\vec{e}_\varphi$$

4) Trièdre de Serret-Frenet

La vitesse et l'accélération dans le repère de Serret-Frenet

1 / Plan osculateur à la courbe

(1) Le **plan osculateur** est le plan tangent à la courbe formée par les vecteurs $\vec{v}(M/R)$ et $\vec{\gamma}(M/R)$.

Dans ce plan, prenons comme axe de coordonnées la tangente et la normale à la trajectoire en M dans le plan osculateur et de vecteurs unitaires respectivement $\vec{\tau}$ et $\vec{n}$, on a : $\vec{v}(M/R) = v\vec{\tau} = \dfrac{ds}{dt}\vec{\tau}$

où s(t) est l'abscisse curviligne du point M à l'instant t, on a donc $\vec{\tau} = \vec{\tau}(s)$ et $\vec{n} = \vec{n}(s)$.

(2) La normale $\vec{n}$ à la courbe contenue dans le plan osculateur est dite **normale principale**.

(3) La **courbure** au point M est la quantité K(s) définit par l'équation : $\dfrac{d\vec{\tau}}{ds} = K(s)\vec{n}$.

D'après ce qui précède, on a : $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dfrac{ds}{dt}\vec{\tau}$ d'où $\vec{\tau} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{ds}$.

(4) **Rayon de courbure** : le rayon de courbure en un point M d'abscisse curviligne s(t) est l'inverse de la courbure en ce point :

$$R(s) = K^{-1}(s).$$

2/ Trièdre de Serret-Frenet

Pour une courbe, il existe en chaque point M(s) un repère (orthonormé direct) dit **repère de Serret-Frenet** $R'(M, \vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b})$:

où $\vec{\tau}$ est le vecteur unitaire porté par la tangente en M,

$\vec{n}$ est le vecteur unitaire porté par la **normale principale**

$\vec{b}$ est le vecteur unitaire directement perpendiculaire à $\vec{\tau}$ et à $\vec{n}$.

$\vec{b}$ est appelé la **binormale** de la courbe au point M(s) considéré.

Si le point M est un point **mobile** dans un référentiel R(O,xyz), son accélération s'exprime dans le référentiel R' par la relation suivante :

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{d\vec{v}(M/R)}{dt} = \ddot{s}\vec{\tau} + \dot{s}\frac{d\vec{\tau}}{dt}$$

que l'on peut encore écrire :

$$\vec{\gamma}(M/R) = \ddot{s}\vec{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{R(s)}\vec{n} = \vec{\gamma}_t + \vec{\gamma}_n$$

somme des accélérations tangentielle et normale.

II.3 Quelques mouvements particuliers

1 / Mouvement rectiligne

Mouvement rectiligne si la trajectoire est une droite ;
Mouvement rectiligne et uniforme si de plus sa vitesse constante.

- Si $\vec{v}(t) = \vec{v}_0$ où $\vec{v}_0$ est un vecteur constant, la loi du mouvement est $\overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{OM}(t_0) + (t - t_0)\vec{v}_0$, La trajectoire est contenue dans une droite parallèle à $\vec{v}_0$.
- Si $\vec{v}(t) = \lambda(t)\vec{u}$ où $\lambda(t)$ est une fonction de temps t continue et $\vec{u}$ un vecteur constant non nul, on a :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{OM}(t_0) + \vec{u}\int_{t_0}^{t} \lambda(t)dt$$

.

2/ Mouvement circulaire

Dans R(O,xyz), R rayon de la circonférence (=cte>0)

$$\overrightarrow{OM} = R(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}) = R\vec{e}_r$$
$$\vec{v}(M/R) = R\dot{\theta}(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}) = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$
$$\vec{v}(M/R) \perp \overrightarrow{OM} \text{ et } v = R|\dot{\theta}|$$
$$\vec{\gamma}(M/R) = -R(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta)\vec{i} + R(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta)\vec{j}$$

De même on peut avoir $\vec{\gamma}(M/R) = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_r = \vec{\gamma}_t - \vec{\gamma}_n$: somme des accélérations **tangentielle**, $\vec{\gamma}_t$, qui est parallèle à la vitesse et dont la norme est $\gamma_t = R|\ddot{\theta}|$ et **normale**, $\vec{\gamma}_n$,.qui perpendiculaire à la vitesse et parallèle et de sens opposé au vecteur position, sa norme est $\gamma_n = R\dot{\theta}^2$.

Remarque :

(1) On rencontre très souvent des mouvements circulaires que cela vaut la peine d'apprendre définitivement ces formules par cœur.

(2) On peut aussi écrire, avec $\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{k}$ vecteur vitesse de rotation autour de l'axe Oz ; d'où $\vec{v}(M/R) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} = R\vec{\omega} \wedge \vec{e}_r$.

(3) Si $\dot{\theta} = cte$, le mouvement **circulaire est dit uniforme**, son accélération est $\vec{\gamma}(M/R) = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r$. Dans un mouvement circulaire à vitesse constante en norme, l'accélération n'est pas nulle.

2/ Mouvement hélicoïdal

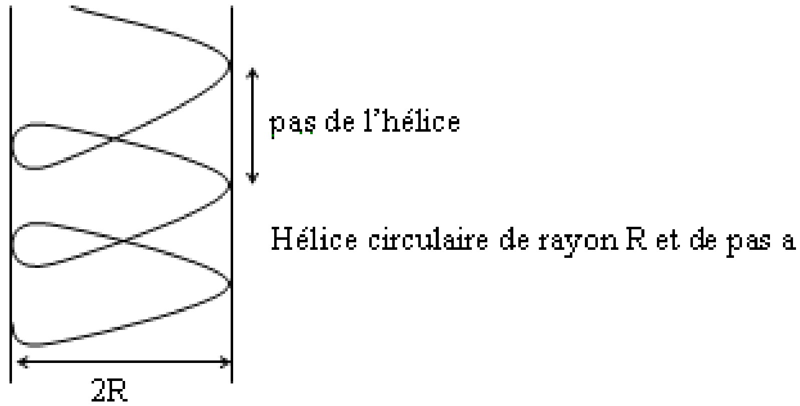
Soit un référentiel direct R(O,xyz), on appelle **hélice circulaire** de pas a et de rayon R (a et R constantes >0) la courbe représentée paramètriquement pour $\theta \in \mathrm{IR}$ par l'équation :

$$\overrightarrow{OM} = R\cos\theta\vec{i} + R\sin\theta\vec{j} + \frac{a\theta}{2\pi}\vec{k}$$

Si θ=θ(t) (fonction de temps) : le mouvement de M est appelé **mouvement hélicoïdal**. Sa trajectoire est donc contenue dans l'hélice. Avec les vecteurs de base cylindrique $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{k})$, on a :

$$\vec{v}(M/R) = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \frac{a}{2\pi}\dot{\theta}\vec{k} \text{ et } \vec{\gamma}(M/R) = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_\rho + R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + \frac{a}{2\pi}\ddot{\theta}\vec{k}.$$

Si on pose $\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{k}$ vecteur vitesse de rotation, et si on pose m la projection orthogonale de M sur l'axe de l'hélice, Oz, on a aussi : $\vec{v}(M/R) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{Om} + \frac{a}{2\pi}\dot{\theta}\vec{k}$ avec $\overrightarrow{Om} = R\vec{e}_\rho$



<u>5.3- Exercices :</u>

(1) Trouver l'expression du rayon de courbure d'une courbe définie par ses équations paramétriques :

Rép. $\vec{v} = v\vec{\tau}$ et $\vec{\gamma} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{R}\vec{n}$, d'où $\left|\vec{v} \wedge \vec{\gamma}\right| = \frac{v^3}{R}$. Par exemple le cas d'une courbe plane, z=0, on arrive à : $R = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}{\left|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}\right|}$

(2) même question pour la courbe y=y(x), on a : $y' = \frac{dy}{dx}$ et $R = (1 + y'^2)^{3/2}\left|y'\right|^{-1}$

(3) même question pour $\rho=\rho(\theta)$, on a : $\rho' = \frac{d\rho}{d\theta}$ et $R = (\rho'^2 + \rho^2)^{3/2}\left|\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''\right|^{-1}$