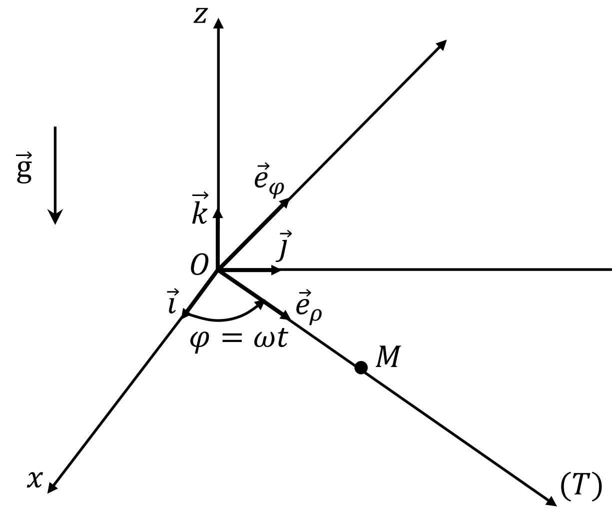
Mécanique du point matériel

TD3

Exercice 1:

Soit $\Re(O, xyz)$ un référentiel orthonormé direct et Galiléen, muni de la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Soit M un point matériel de masse m. Le point M glisse sans frottement le long de la tige (T) qui tourne dans le plan horizontal (xoy) autour de l'axe (Oz) avec une vitesse angulaire constante ω ($\varphi = \omega t$ et $\omega > 0$). M est soumis, en plus de son poids $\vec{P}$ et de la réaction de la tige $\vec{R}$, à une force $\vec{F} = F\vec{e}_\rho$. Dans ces conditions, le mouvement de M le long de la tige suit la loi $\overrightarrow{OM} = at\vec{e}_\rho$ (t étant le temps et a une constante positive). $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ est la base cylindrique liée à la tige.



<u>N.B : Toutes les expressions vectorielles doivent être exprimées dans la base</u> $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$.

1) Calculer la vitesse $\vec{V}(M/\Re)$ et l'accélération $\vec{\gamma}(M/\Re)$ de M dans $\Re$ en fonction de a, t et ω.

2) Déterminer $\vec{\sigma}_O(M/\Re)$ le moment cinétique en O du point M ainsi que sa dérivée par rapport au temps dans $\Re$.

3) Déterminer les moments dynamiques de chacune des forces agissant sur le point M.

4) En appliquant le théorème du moment cinétique, trouver les expressions des composantes de $\vec{R}$.

5) Déterminer $E_c(M/\mathfrak{R})$ l'énergie cinétique du point M dans $\mathfrak{R}$ ainsi que sa dérivée par rapport au temps dans $\mathfrak{R}$.

6) Déterminer les puissances de chacune des forces agissant sur le point M.

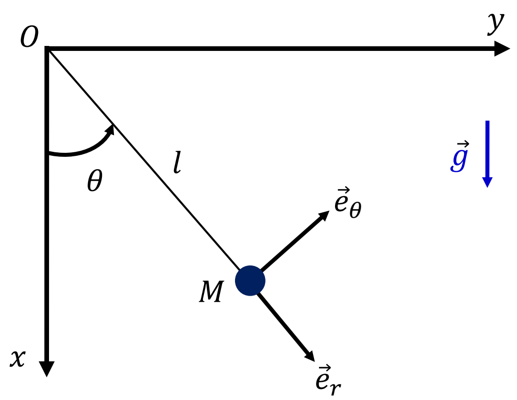
7) En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, trouver l'expression de $\vec{F}$.

Exercice 2:

On considère un pendule simple constitué d'un objet ponctuel M de masse m, accroché à un fil inextensible de longueur l et de masse négligeable. Son mouvement a lieu dans le plan vertical (xOy) du référentiel fixe $\mathfrak{R}(O, xyz)$.

On écarte le pendule d'un angle θ de sa position d'équilibre $(\theta = 0)$ et on le lâche sans vitesse initiale. Les forces de frottement sont supposées inexistantes.

L'ensemble est situé dans le champ de pesanteur terrestre $\vec{g}$ considéré comme uniforme.



1) Exprimer les forces appliquées au point M dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k})$.

2) Calculer $\vec{V}(M/\mathfrak{R})$ et $\vec{\gamma}(M/\mathfrak{R})$ respectivement les vecteurs vitesse et accélération de M dans $\mathfrak{R}$.

3) En appliquant le PFD dans le référentiel galiléen $\mathfrak{R}$:

a) Etablir l'équation différentielle du mouvement dans le cas de faibles oscillations.

b) Résoudre cette équation différentielle.

4) Etablir l'expression de la tension T du fil.

5) Retrouver l'équation différentielle du mouvement en appliquant le théorème de l'énergie cinétique.

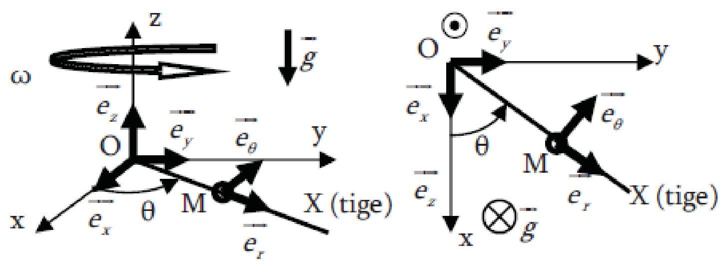
Exercice 3:

Une tige rectiligne horizontale (OX) tourne autour de l'axe (Oz) à la vitesse angulaire constante $\omega = \dot{\theta}$ en restant dans le plan (Oxy). Un anneau M de masse m est enfilé sur cette tige et peut glisser sans frottement. On utilise les coordonnées polaires (r(t),θ(t)) pour décrire le mouvement de M. A l'instant t = 0, l'anneau démarre sans vitesse initiale par rapport à la tige du point M0 repéré par les coordonnées polaires :

$\theta(0) = 0$ et $r(0) = r_0$.

La résistance au mouvement de l'air est négligeable et le champ de pesanteur uniforme :

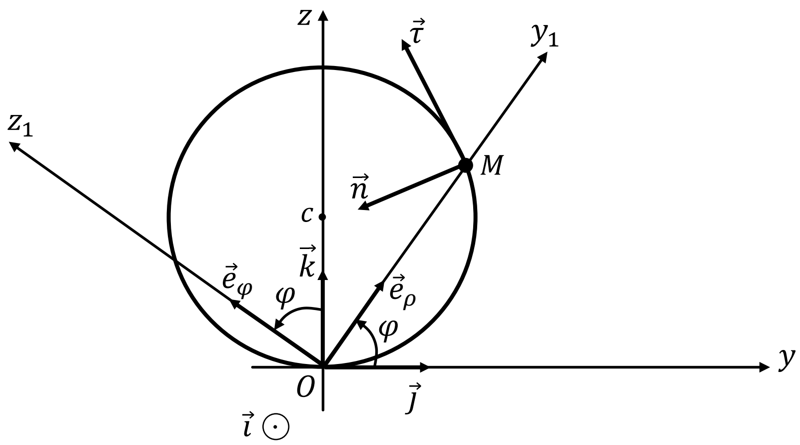
$$\vec{g} = -g\vec{e}_z$$



1. Effectuer le bilan des forces appliquées au point M par le milieu extérieur.
2. Ecrire le PFD dans le référentiel terrestre, projeté dans la base cylindrique.
3. En déduire l'équation de 2nd ordre vérifiée par r(t).
4. Etablir les équations horaires r(t). En déduire l'équation et l'allure de la trajectoire.
5. Déterminer la réaction de la tige sur l'anneau en fonction de t.
6. L'anneau est maintenant soumis à une force de rappel par l'intermédiaire d'un ressort de masse raideur k, de masse négligeable et de longueur à vide r0. Le ressort est enfilé sur la tige, une extrémité est fixée en O et l'autre est attachée au point mobile M. Etablir l'équation différentielle du mouvement de l'anneau lors de la rotation de la tige et discuter de la nature de celui-ci. Les conditions initiales sont inchangées.

Exercice 4:

Soient $\Re(O, x, y, z)$ un référentiel absolu supposé galiléen muni de la base orthonormée directe $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ et $\Re_1(O, x_1, y_1, z_1)$ un référentiel relatif muni de la base orthonormée directe $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{\imath})$. A cours du temps, les axes (Ox) et (Ox_1) restent colinéaires. Dans le plan vertical (yOz), une tige circulaire de centre c et de rayon a est maintenue fixe. Un anneau M de masse m glisse sans frottement sur la tige circulaire. Il est repéré par $\overrightarrow{OM} = 2a\sin\varphi\vec{e}_\rho$ où $\varphi = (\widehat{\vec{\jmath}, \overrightarrow{OM}})$. On désigne par $(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{\imath})$ la base de Frénet comme l'indique la figure ($\vec{n}$ est le vecteur dirigé vers le centre de cercle). L'accélération de la pesanteur est telle que $\vec{g} = -g\vec{k}$.



1) Vérifier que la vitesse de rotation de $\Re_1$ par rapport à $\Re$ est donnée par $\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) = \dot{\varphi}\vec{\imath}$.

2) Calculer $\vec{V}_r(M)$ et $\vec{V}_e(M)$ respectivement les vitesses relative et d'entrainement de M.

3) En déduire que la vitesse absolue de M est donnée par : $\vec{V}_a(M) = 2a\dot{\varphi}(cos\varphi\vec{e}_\rho + sin\varphi\vec{e}_\varphi)$.

4) Donner les expressions des vecteurs $\vec{\tau}$ et $\vec{n}$.

5) Donner les expressions des forces appliquées à l'anneau M dans $\Re$.

6) a) Calculer $\vec{\sigma}_c(M/\Re)$ le moment cinétique par rapport au point c de M dans $\Re$.

b) Calculer les moments dynamiques par rapport à c des forces appliquées à M dans $\Re$.

c) En appliquant le théorème du moment cinétique, Montrer que l'équation différentielle du mouvement de M peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{2a} sin(2\varphi) = 0$$