# Mécanique du point matériel

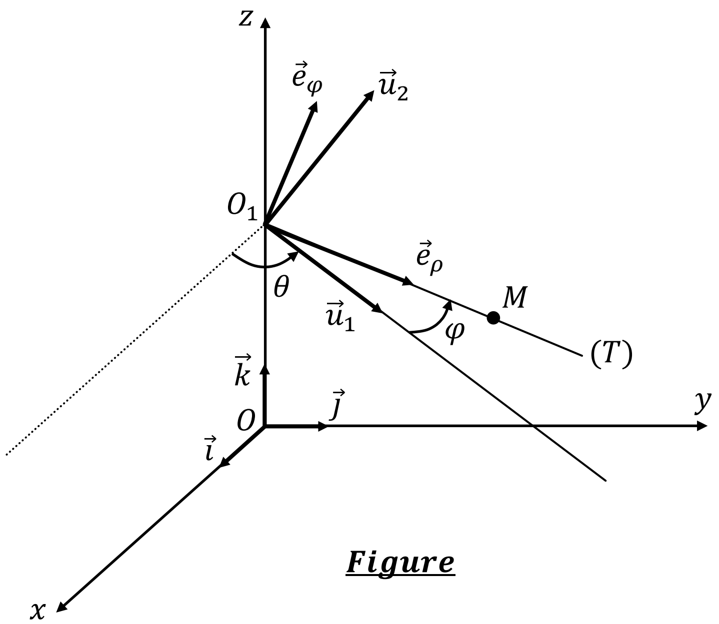
## TD2

### Exercice 1 :

Soient $\Re(O, xyz)$ un référentiel absolu muni de la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ et $\Re_1(O_1, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{k})$ le référentiel relatif dont l'origine $O_1$ est en mouvement rectiligne sur l'axe $(Oz)$. On donne $\overrightarrow{OO_1} = at\vec{k}$ où $a$ est une constante positive et $t$ le temps.

En plus, $\Re_1$ tourne autour de l'axe $(Oz)$ avec une vitesse angulaire constante $\omega_1$ telle que $\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) = \omega_1\vec{k}$ $(\omega_1 = \dot{\theta})$. Dans le plan horizontal $(O_1, \vec{u}_1, \vec{u}_2)$, une tige $(T)$ tourne autour de l'axe $(O_1z)$ avec une vitesse angulaire constante $\omega_2$, tel que $\varphi = \omega_2 t = (\widehat{\vec{u}_1, \vec{e}_\rho})$ où $\vec{e}_\rho$ est le vecteur unitaire porté par la tige (T).

Un point $M$ est assujetti à se déplacer sur la Tige $(T)$. Il est repéré dans le référentiel $\Re_1$ par : $\overrightarrow{O_1M} = \rho\vec{e}_\rho$ où $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ est une base mobile dans $\Re_1$.




***Figure***

<u>N.B : Toutes les expressions vectorielles doivent être exprimées dans la base</u> $(\vec{e}_\rho\,,\ \vec{e}_\varphi\,,\vec{k})$.

**<u>I-Etude de la cinématique de M par décomposition de mouvement :</u>**

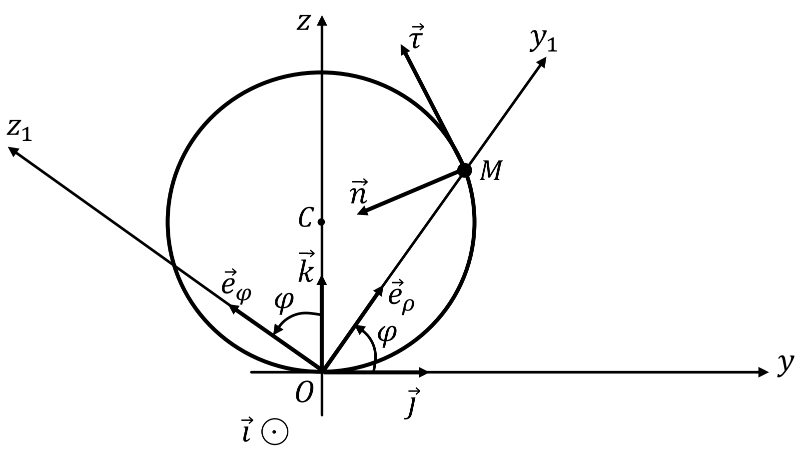
1) Déterminer $\vec{V}_r(M)$ la vitesse relative de $M$.
2) Déterminer $\vec{V}_e(M)$ la vitesse d'entrainement de $M$.
3) En déduire $\vec{V}_a(M)$ la vitesse absolue de $M$.
4) Déterminer $\vec{\gamma}_r(M)$ l'accélération relative de $M$.
5) Déterminer $\vec{\gamma}_e(M)$ l'accélération d'entrainement de $M$.
6) Déterminer $\vec{\gamma}_c(M)$ l'accélération de Coriolis de $M$.
7) En déduire $\vec{\gamma}_a(M)$ l'accélération absolue de $M$.

**<u>II-Etude de la cinématique de M par calcul direct :</u>**

1) Retrouver $\vec{V}_a(M)$ par calcul direct.
2) Retrouver $\vec{\gamma}_a(M)$ par calcul direct.

## Exercice 2:

Soient $\Re(O,x,y,z)$ un référentiel absolu supposé galiléen muni de la base orthonormée directe $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ et $\Re_1(O,x_1,y_1,z_1)$ un référentiel relatif muni de la base orthonormée directe $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{\imath})$. Au cours du temps, les axes $(Ox)$ et $(Ox_1)$ restent colinéaires. Dans le plan vertical $(yOz)$, une tige circulaire de centre $C$ et de rayon $a$ est maintenue fixe. Un anneau $M$ de masse $m$ glisse sans frottement sur la tige circulaire. Il est repéré par $\overrightarrow{OM} = 2a\sin\varphi\vec{e}_\rho$ où $\varphi = (\widehat{\vec{\jmath},\overrightarrow{OM}})$. On désigne par $(\vec{\tau},\vec{n},\vec{\imath})$ la base de Frénet comme l'indique la figure ($\vec{n}$ est le vecteur dirigé vers le centre de cercle).



N.B : Toutes les expressions vectorielles doivent être exprimées dans la base $(\vec{e}_\rho\,,\ \vec{e}_\varphi\,,\vec{\imath})$.

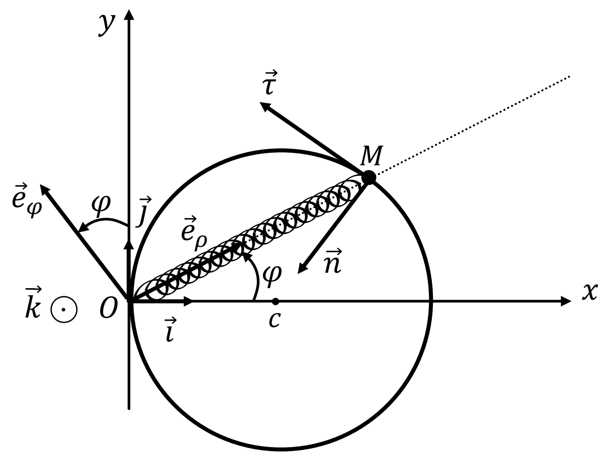
1) Vérifier que la vitesse de rotation de $\Re_1$ par rapport à $\Re$ est donnée par $\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) = \dot{\varphi}\vec{\imath}$ .
2) a) Calculer $\vec{V}_r(M)$ et $\vec{V}_a(M)$ respectivement les vitesses relative et absolue de $M$.

   b) En déduire $\vec{\tau}$ le vecteur tangent à la trajectoire.

   c) Déterminer $\vec{n}$ le vecteur normal à la trajectoire.
3) Déterminer $\vec{\gamma}_r(M)$ l'accélération relative de $M$.
4) Déterminer $\vec{\gamma}_e(M)$ l'accélération d'entrainement de $M$.
5) Déterminer $\vec{\gamma}_c(M)$ l'accélération de Coriolis de $M$.
6) En déduire $\vec{\gamma}_a(M)$ l'accélération absolue de $M$.

## Exercice 3:

Soient $\Re(O,xyz)$ un référentiel absolu muni de la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ et $\Re_1(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{k})$ le référentiel relatif. Dans le plan horizontal $(xOy)$, une tige circulaire de rayon $a$ et de centre $c$ est maintenue fixe. Un anneau $M$ de masse $m$ est assujetti à se déplacer sans frottement sur la tige circulaire. Il est repéré dans $\Re$ par : $\overrightarrow{OM} = 2a\cos\varphi\vec{e}_\rho$ où $\varphi = (\widehat{\vec{\imath},\overrightarrow{OM}})$ avec $\frac{-\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ . L'anneau $M$ est attaché à l'extrémité d'un ressort de raideur $k$ et de longuer à vide $a$. L'autre extrémité du ressort est fixée au point $O$. En plus de la force de rappel $\vec{F}$ exercée par le ressort, l'anneau $M$ est soumis à la réaction de la tige $\vec{R}$ et à son poids $\vec{P} = -mg\vec{k}$. On désigne par $(\vec{\tau},\vec{n},\vec{k})$ la base de Frénet comme l'indique la figure ($\vec{n}$ est le vecteur dirigé vers le centre de cercle).



N.B : Toutes les expressions vectorielles doivent être exprimées dans la base ($\vec{e}_\rho$ , $\vec{e}_\varphi$ , $\vec{k}$).

1) Calculer $\vec{V}(M/\Re)$ la vitesse de $M$ par rapport à $\Re$.
2) En déduire les expressions des vecteurs tangent $\vec{\tau}$ et normal $\vec{n}$ à la trajectoire au point $M$.
3) Déterminer $\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)$ la vitesse de rotation de $\Re_1$ par rapport à $\Re$.
4) Déterminer les accélérations relative $\vec{\gamma}_r(M)$, d'entraînement $\vec{\gamma}_e(M)$ et de Coriolis $\vec{\gamma}_c(M)$ de $M$.
5) Donner les expressions des forces appliquées à $M$ dans $\Re_1$.
6) Ecrire le PFD appliqué à $M$ dans $\Re_1$.
7) a) En projetant le PFD sur $\vec{\tau}$ , donner l'équation différentielle du mouvement de $M$.

   b) Que devient cette équation pour des faibles valeurs de $\varphi$.
8) En projetant le PFD sur $\vec{n}$ et $\vec{k}$, trouver les composantes de la réaction $\vec{R}$ du support sur $M$.